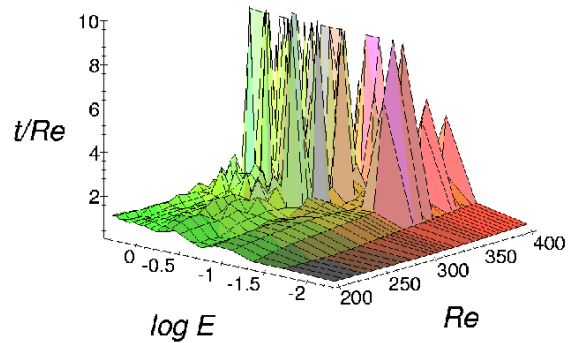


Abbildung 8.37.: Lebensdauern der turbulenten Zustände in der ebenen Couette-Strömung, die bei $t = 0$ aus derselben (bis auf die Amplitude) lokalisierten Störung hervorgingen, als Funktion der anfänglichen Energie $E(0)$ und der Reynoldszahl Re (nach Schmiegel and Eckhardt, 1997).



8.3.5. Das Modell von Moehlis et al. (2004)

Aufbauend auf [Waleffe \(1995\)](#) hat [Waleffe \(1997\)](#) ein verbessertes 8-Moden-Modell zur Modellierung ebener Scherströmungen vorgeschlagen. Ziel dieser Modellierung ist eine möglichst gute Wiedergabe der Eigenschaften des Turbulenzumschlags bei Minimierung der Anzahl der Moden. Dazu sollten die Moden möglichst gut an die wesentlichen physikalischen Prozesse angepaßt sein.

Ableitung des 9-Moden-Modells von Moehlis et al.

Motiviert durch das 8-Moden-Modell von [Waleffe \(1997\)](#) wurde es von [Moehlis et al. \(2004\)](#) auf 9 Moden erweitert. Auch wurden andere quantitative und qualitative Änderungen vorgenommen. Ausgangspunkt ist die skalierte Navier-Stokes-Gleichung für die Strömung zwischen zwei reibungsfreien Platten im Abstand $2d$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}(y), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8.45)$$

mit der Reynoldszahl $Re = Ud/2\nu$. Ziel ist ein Wenig-Moden-Modell, welches man durch eine *Galerkin-Approximation* erhalten kann. Zur Vereinfachung wurden *free-slip*-Randbedingungen gewählt, d.h., an den Rändern $y = \pm 1$ gilt

$$v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (8.46)$$

Diese Randbedingungen werden schön von einfachen Harmonischen individuell erfüllt.²² Der Antrieb der Strömung erfolgt mittels der künstlichen Volumenkraft

$$\mathbf{F}(y) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4Re} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \mathbf{e}_x. \quad (8.47)$$

Die Form der y -Abhängigkeit ergibt sich aus den *free-slip*-Randbedingungen. Mit dem Antrieb $\mathbf{F}(y)$ erhält man als Grundlösung das laminare Geschwindigkeitsprofil

$$\mathbf{U}(y) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \mathbf{e}_x. \quad (8.48)$$

²²Für feste Randbedingungen muß die Geschwindigkeitskomponente v und deren erste Ableitung am Rand verschwinden. Zur spektralen Darstellung mit Hilfe Funktionen, die einzeln die Randbedingung erfüllen, muß man dann die etwas komplizierteren Chandrasekhar-Funktionen nehmen ([Chandrasekhar, 1961](#)).

8. Übergang zur Turbulenz

Dieses Profil hat zwar einen Wendepunkt, es ist aber linear stabil für alle Reynoldszahlen (Tollmien, 1935; Drazin and Reid, 1981). Damit sind die Randbedingungen periodisch. Das periodische Volumen zu den Wellenzahlen $\alpha = 2\pi/L_x$, $\beta = 2\pi/L_y$ und $\gamma = 2\pi/L_z$ sei V .

Die Ableitung eines dynamischen Systems mit wenigen (9) Freiheitsgraden geschieht in Analogie zur Ableitung des Lorenz-Modells des Rayleigh-Bénard-Problems (Lorenz, 1963; McLaughlin and Martin, 1975) oder des Taylor-Couette-Problems (Kuhlmann, 1985). Dabei wird die Strömung (hier die gesamte Strömung) als Superposition

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_m a_m(t) \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \quad (8.49)$$

der 9 physikalisch motivierten fest vorgegebene Moden $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ angesetzt. Diese Moden sind allesamt separat divergenzfrei und orthogonal unter dem Skalarprodukt

$$\int_V \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_m \, dV = 2 \frac{2\pi}{\alpha} \frac{2\pi}{\gamma} \delta_{nm}, \quad (8.50)$$

wobei der Vorfaktor aus Normierungsgründen auftritt. Die wichtigsten Moden sind die Mode, die den Grundzustand repräsentiert,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(\pi y/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.51)$$

die *streak*-Mode

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos^2(\pi y/2) \cos(\gamma z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

und der Wirbel in Stromrichtung

$$\mathbf{u}_3 = \frac{2}{\sqrt{4\gamma^2 + \pi^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma \cos(\pi y/2) \cos(\gamma z) \\ \pi \sin(\pi y/2) \sin(\gamma z) \end{pmatrix}. \quad (8.53)$$

Dazu kommen noch andere 6 weitere Moden, welche Wirbel mit Vortizität in y -Richtung beschreiben (für die *streak*-Instabilität) oder für die nichtlineare Wechselwirkung der Moden untereinander wichtig sind.

Die nichtlinearen dynamischen Gleichungen für die zeitabhängigen Amplituden

$$\dot{a}_m(t) = f_m[a_1(t), \dots, a_9(t)] \quad (8.54)$$

erhält man dann durch Einsetzen des Ansatzes in die Navier-Stokes-Gleichung und die Projektion der Gleichung auf die orthogonalen Moden im Sinne des Galerkin-Verfahrens (siehe z.B. Finlayson, 1972).

Ein positives Indiz für die Relevanz des resultierenden dynamischen System mit 9 Freiheitsgraden ist Tatsache, daß es neben dem stabilen Grundzustand ($\mathbf{u}_1 =$

1, $\mathbf{u}_{i \neq 1} = 0$) nichttriviale stationäre Lösungen besitzt, die instabil sind (siehe Moehlis et al., 2004). Instabile stationäre Lösungen wurden ja auch von Schmiegel (1999) für die ebene Couette-Strömung gefunden (siehe Kap. 8.3.4). In beiden Systemen besitzen die instabilen stationären Lösungen eine sehr ähnliche räumliche Struktur.

Dynamik

Um die Dynamik zu erhalten, kann man das System (8.54) leicht numerisch integrieren. Zunächst wurde das periodische Volumen mit $L_x = 1.75\pi$ und $L_z = 1.2\pi$ betrachtet. Denn dieses Volumen ist die kleinste Einheitszelle, für welche die ebene Couette-Strömung numerisch Turbulenz zeigt (Hamilton et al., 1995).

Für $Re = 400$ findet man eine Dynamik, die den typischen *self-sustaining process* (Abb. 8.29) widerspiegelt. Dabei treten Wirbel in Stromrichtung auf, die *streaks* generieren. Wenn die *streaks* hinreichend stark angewachsen sind, werden sie instabil. Als Folge der Instabilität werden die *streaks* in Stromrichtung wellig und zerfallen in einzelne Wirbel um sich anschließend zu neuen Wirbeln in Stromrichtung zu entwickeln, jetzt nur mit umgekehrten Drehsinn im Vergleich zu den ursprünglichen Wirbeln, welche die *streaks* generiert hatten. Dieses Spiel wiederholt sich in einer chaotischen Abfolge. Eine Momentaufnahme ist in Abb. 8.38 gezeigt.

Das transiente Verhalten aller Amplituden ist in Abb. 8.39 gezeigt. Man erkennt, daß schon bei $t \approx 1600$ die Tendenz zu einem Rückfall in den laminaren Zustand besteht. Schließlich passiert dies jedoch erst bei $t \approx 2600$.²³

Offenbar ist der turbulente Zustand für diese Reynoldszahl kein Attraktor, oder die Anfangsbedingungen lagen außerhalb des Attraktionsbereichs. Die Spekulationen gehen jedoch dahin, daß dieses Verhalten durch einen *chaotischen Sattel* verursacht wird. Als chaotischen Sattel bezeichnet man die Kollision eines chaotischen Attraktors mit einem anderen attraktiven Orbit (hier der laminare Grundzustand). Durch die Kollision im Phasenraum wird der ursprünglich große Attraktionsbereich des chaotischen Attraktors ausgehöhlt und eine immer größer werdende Menge von Anfangsbedingungen können dem chaotischen Attraktor entkommen. Der Attraktionsbereich des Attraktors wird dabei fraktal und schrumpft signifikant ein (siehe z.B. Thompson, 1993). Auf jeden Fall wurde ein ähnliches Verhalten auch experimentell gefunden (siehe Kap. 8.3.1).

Lebensdauer turbulenter Zustände

Um die Eigenschaften des transienten chaotischen Verhaltens zu untersuchen, wurde die Lebensdauer des turbulenten Zustands farbig kodiert und als Funktion der Anfangsenergie und der Reynoldszahl in Abb. 8.40 für bestimmte Anfangsbedingungen dargestellt. Das Ergebnis sieht auch auf wesentlich kleineren Skalen ähnlich aus und deutet damit auf ein fraktales Verhalten hin.

²³Ein ähnliches transientes Verhalten findet man für $Re = 400$ auch in der größeren Box mit $L_x = 4\pi$ und $L_z = 2\pi$ (hier nicht gezeigt).

8. Übergang zur Turbulenz

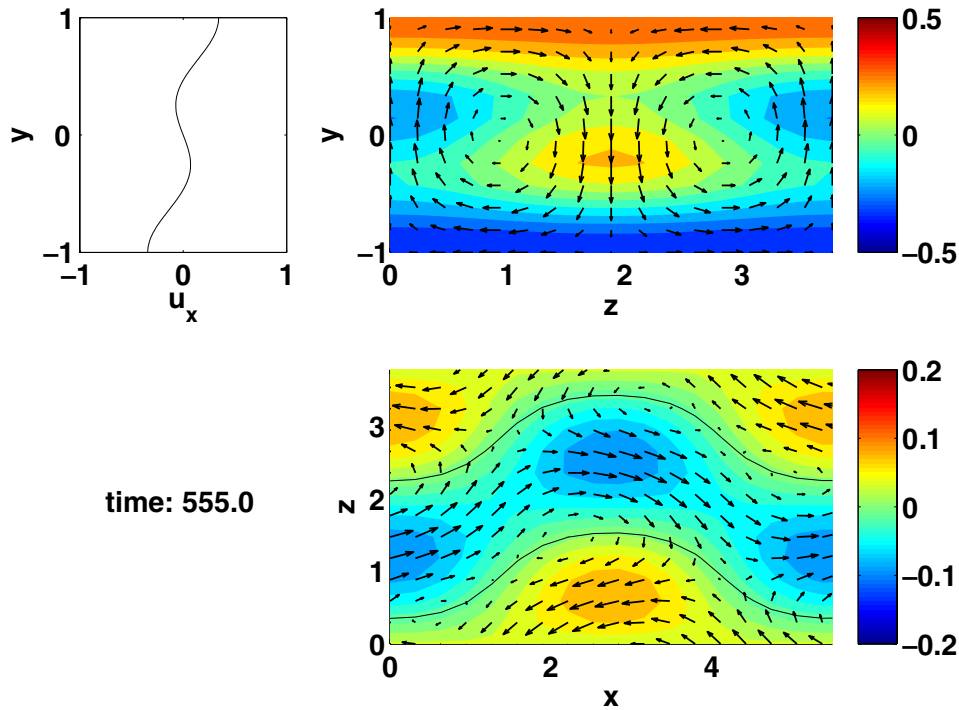


Abbildung 8.38.: Dynamik (Film) der Wirbelstrukturen im 9-Moden-Modell für $Re = 400$. Links oben ist die mittlere Strömung gezeigt, die im Grundzustand ein Sinus-Profil wäre. Rechts oben sind die Wirbel in Stromrichtung und die Strömung in Stromrichtung (Farbe) zu sehen, in Stromrichtung gemittelt. Rechts unten sieht man die welligen/instabilen *streaks* in der Mittelebene. Die Farbe kennzeichnet die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu der betreffenden Ebene.

Für gegebene Reynoldszahl hängt die Lebensdauer von den Anfangsbedingungen ab. Es ist daher naheliegend, nach der Wahrscheinlichkeit $P(t)$ zu fragen, eine bestimmte Lebensdauer t zu finden. Um diese Verteilung zu bestimmen, wurden für eine feste Reynoldszahl $N = 1000$ zufällige Anfangsbedingungen auf einer Energieoberfläche $\sum_i a_i^2 = 0.3$ maximal bis zur Zeit $t_{\max} = 10^4$ integriert. Zum Zeitpunkt t werden von diesen N Realisierungen noch $N^{\text{turb}}(t)$ turbulent sein. $N - N^{\text{turb}}(t)$ Zustände werden laminar sein. Die Wahrscheinlichkeit $P(t) = N^{\text{turb}}(t)/N$, einen turbulenten Zustand nach der Zeit t zu finden, ist in Abb. 8.41 für verschiedene Reynoldszahlen dargestellt.

Man sieht, daß die Verteilung für $Re < 320$ ein für große Zeiten exponentielles Verhalten gemäß $P(t) \propto e^{-\epsilon t}$ aufweist, wobei $\epsilon(Re)$ die Rate ist, mit welcher turbulente Zustände zum laminaren Zustand entkommen können. Dies deutet darauf hin, daß es für diese Reynoldszahlen keinen turbulenten Attraktor gibt. Für größer Reynoldszahlen klingt die Wahrscheinlichkeitsverteilung *nicht* exponentiell mit t ab. Anscheinend gibt es in diesen Fällen einen turbulenten Attraktor, der einen gewissen Anteil von Anfangsbedingungen absorbiert. Dies wurde auch durch andere Untersuchungen des 9-Moden-Modells belegt. Allerdings findet man für die größere Einheitszelle (Volumen der Strömung bzw. Periodizitätslänge) für *alle* untersuchten

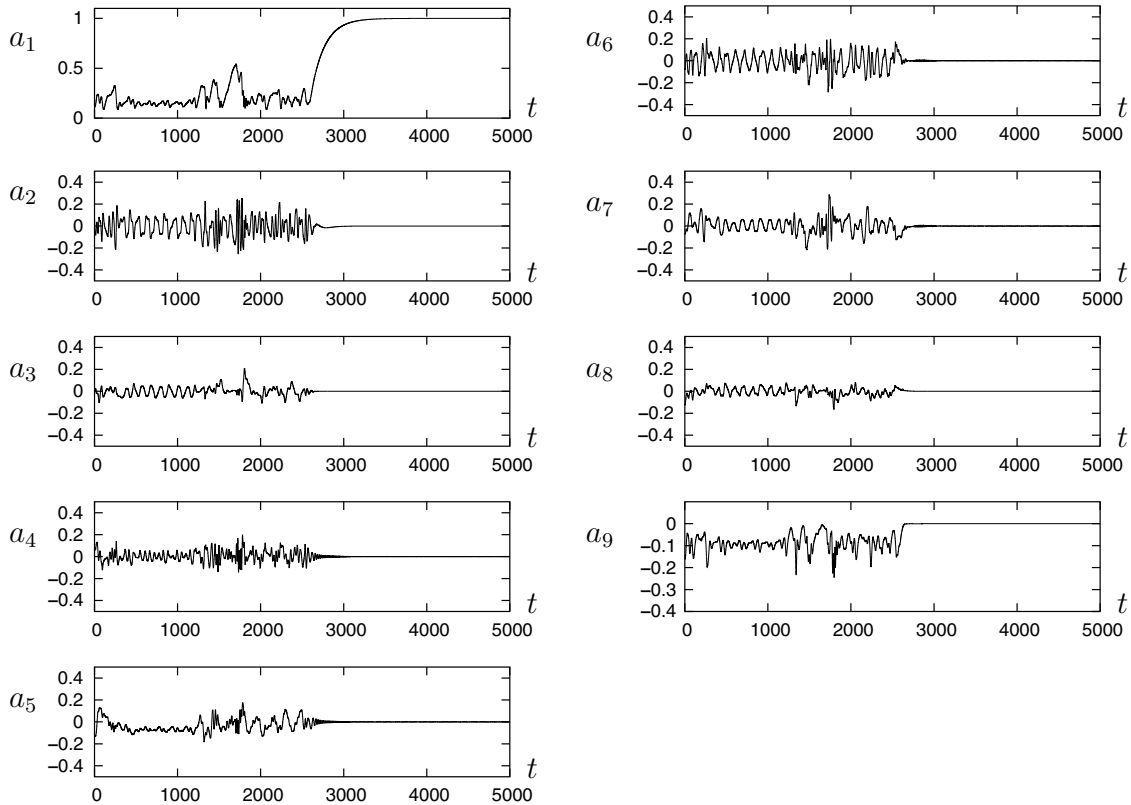
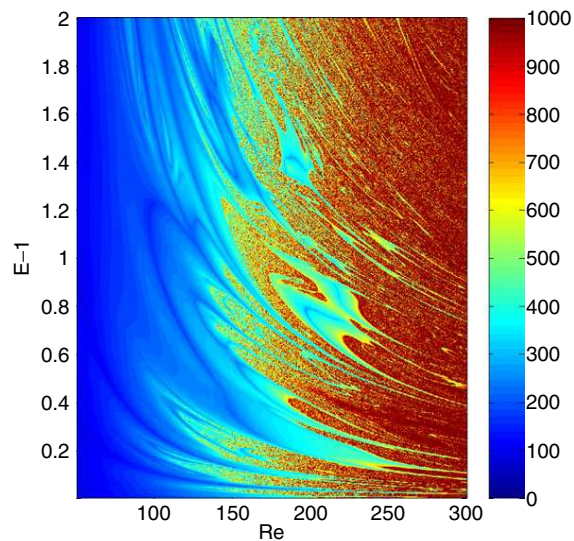


Abbildung 8.39.: Zeitverhalten der Amplituden für $Re = 400$.

Abbildung 8.40.: Lebensdauer des turbulenten Zustands als Funktion der Anfangsenergie und der Reynoldszahl für die Anfangsbedingung $a_{2,3,4,5} = \sqrt{E-1}/2$ und $a_{1,6,7,8,9} = 0$.



Reynoldszahlen $Re \leq 400$ ein exponentielles Verschwinden der Wahrscheinlichkeit mit der Lebensdauer. Dieses Ergebnis stellt die Existenz eines turbulenten Attraktors wieder in Frage. Allgemein ist jedoch ein deutliches Ansteigen des Medians der Lebensdauer mit der Reynoldszahl festzustellen (Abb. 8.42). Der Median τ ist die Zeit, nach der $1/2$ der Zustände zerfallen ist, also $P(\tau) = 1/2 = e^{-c\tau}$, d.h.

8. Übergang zur Turbulenz

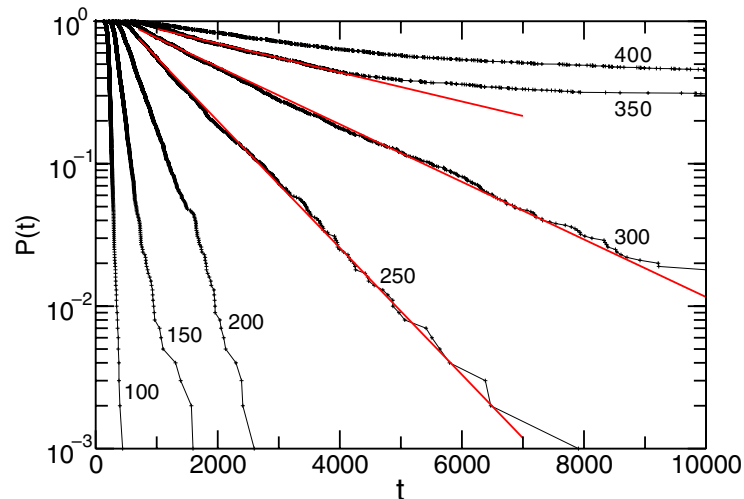


Abbildung 8.41.: Wahrscheinlichkeit $P(t)$, zur Zeit t einen turbulenten Zustand anzutreffen (berechnet für die kleine Elementarzelle von Moehlis et al. (2004)). Die roten Linien stellen exponentielle Fits dar. Der Kurvenparameter ist die Reynoldszahl. Für die Anfangsbedingungen, siehe Text.

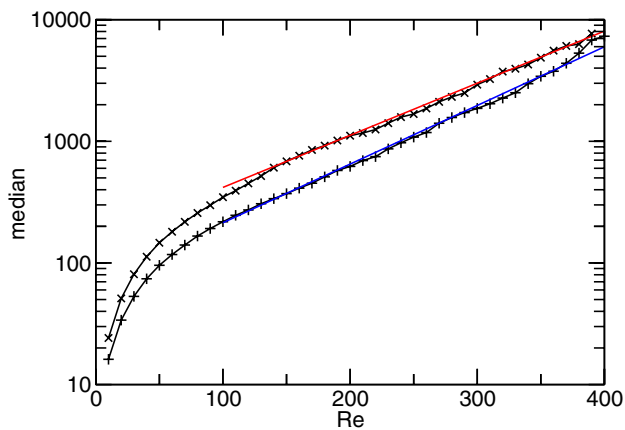


Abbildung 8.42.: Median der Lebensdauer turbulenter Zustände als Funktion der Reynoldszahl für die kleine (+) und die große (\times) Elementarzelle von Moehlis et al. (2004). Die durchgezogenen Kurven sind exponentielle Fits.

$\tau = \ln(2)/\epsilon$. Die transienten turbulenten Zustände sind also insbesondere für höhere Reynoldszahlen mit großer Wahrscheinlichkeit sehr langlebig.

Die exponentielle Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Lebensdauern ist konsistent mit der Hypothese eines chaotischen Sattels. Die Ergebnisse bestätigen die Modellvorstellung über einen selbst-erhaltenden Prozeß nach Hamilton et al. (1995) und Waleffe (1997). Desweiteren ist die gefundene Reynoldszahl, oberhalb derer man langlebige turbulente Zustände in dem 9-Moden-Modell findet, nicht sehr verschieden von der Reynoldszahl $Re \approx 130$, welche für die ebene Couette-Strömung in numerischen Rechnungen gefunden wurde (Schumacher and Eckhardt, 2001). Die Ergebnisse sind auch konsistent mit den experimentellen Werten (siehe Kap. 8.3.1), wenn man bedenkt, daß die Werte des Modells um einen Faktor von ungefähr $2/5$ niedriger sein sollten als die experimentellen Werte, da man ja *free-slip*- anstelle von festen Randbedingungen verwendet hat.

8.3.6. Turbulenz-Übergang in der Rohrströmung

Puffs und Slugs

Ganz ähnliche Ergebnisse wie für den Turbulenzübergang bei ebenen Schwerströmungen findet man auch für die Hagen-Poiseuillesche Rohrströmung. Üblicherweise wird die Reynoldszahl mit der mittleren Geschwindigkeit und dem Rohrdurchmesser gebildet $Re := \bar{w}d/\nu$.

In der Rohrströmung findet man im Übergangsbereich lokalisierte turbulente Flecken. Diese können in zwei verschiedenen Varianten auftreten, die sich im wesentlichen mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit bewegen. Bei einem *turbulent puff* handelt es sich um einen relativ kurzen Flecken, dessen Größe sich im Laufe der Entwicklung nicht ändert und recht langlebig ist. Er kann aber scheinbar zufällig verschwinden oder sich in zwei Puffs aufspalten, die dann getrennt propagieren.

Die Puffs laufen durch das Rohr mit einer Geschwindigkeit, die etwa der mittleren Strömungsgeschwindigkeit entspricht. Man glaubt, daß die Puffs eine Art minimale turbulente Zelle sind. Die Puffs sind circa 3 Rohrdurchmesser lang. Das stromaufwärtsgelegene Gebiet des Puffs hat eine Struktur für alle turbulenten Umschläge im Rohr typische Struktur. Daher glaubt man, daß der Mechanismus des Übergang zur Turbulenz (durch die Struktur stromaufwärts vom Puff) derselbe ist, der auch einen turbulenten Puff aufrecht (turbulent) erhält (Doorne and Westerweel, 2009).

Bei einem *turbulent slug* handelt es sich um einen längeren Turbulenzfleck (siehe z.B. Abb. 8.20). Ein turbulenter Slug dehnt sich im Laufe der Entwicklung aus, so daß schließlich die Strömung im gesamten Rohr turbulent ist. Die stromaufgelegene Front propagiert dabei schneller als die mittlere Strömung und die stromaufgelegene Front läuft langsamer als die mittlere Strömung. Abbildung 8.43 zeigt die typischen Hitzdraht-Signale für einen Puff (links) und einen Slug (rechts). Weiter sind in Abb. 8.44 das Wachstum der Länge eines Slugs gezeigt (links) sowie die Aufspaltung eines Puffs in zwei (rechts). In Abb. 8.45 ist ein turbulenter Puff gezeigt.

Abbildung 8.46 zeigt in der oberen Reihe gemessenen Strukturen in der turbulenten Rohrströmung im Übergangsbereich. Diese werden auch *kohärente Strukturen* genannt. Sie ähneln den Strukturen von exakten periodischen numerischen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung. Diese periodischen Lösungen kann man numerisch suchen und finden. Man stellt fest, daß sie alle instabil sind. Die nichtlinearen Wellen entsprechen hyperbolischen Fixpunkte im Phasenraum. Da diese hyperbolischen Punkte meist nur eine oder wenige instabile Richtungen aufweisen, ziehen sie fast immer den Systemzustand an. Das System verweilt dann eine relativ lange Zeit in der Nähe der exakten Lösung, um ihn dann wieder in einer der instabilen Richtungen zu verlassen. Abbildung 8.47 zeigt Beispiele für Bifurkationsdiagramme der Sattel-Knoten-Verzweigungen, aus denen die exakten instabilen Lösungen hervorgehen.

8. Übergang zur Turbulenz

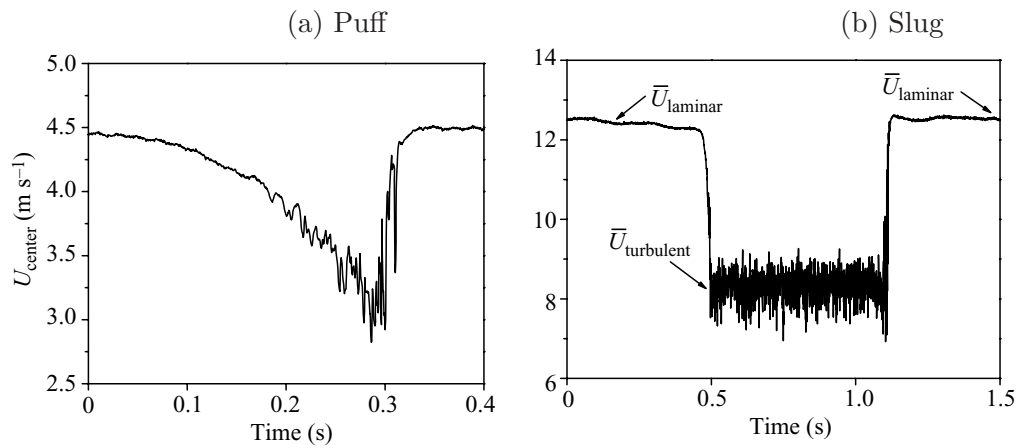


Abbildung 8.43.: Typisches Signal eines Hitzdraht-Anemometers für einen Puff für $Re \lesssim 2300$ (a) und einen Slug für $Re \gtrsim 3000$ (b) (nach [Nishi et al., 2008](#)).

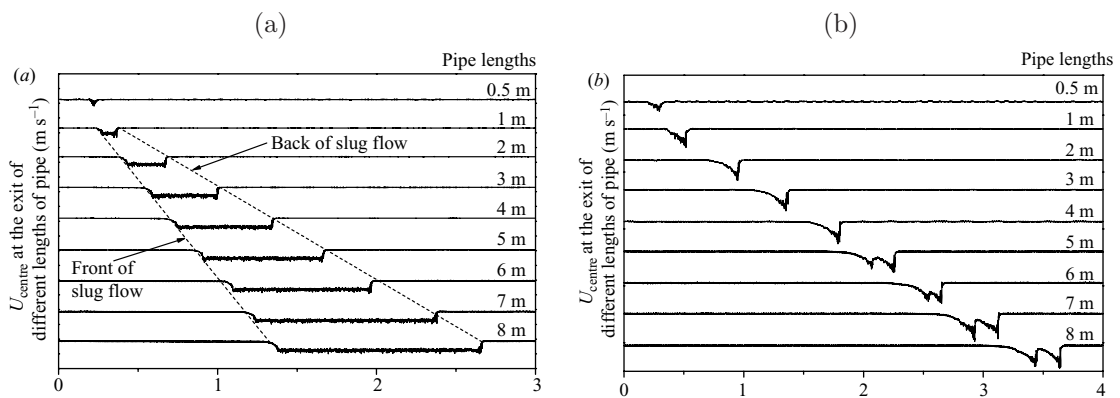


Abbildung 8.44.: (a) Raumzeitliche Entwicklung eines Slugs für $Re = 4530$ und (b) das Aufspalten eines Puffs in zwei Puffs für $Re = 2495$ (nach [Nishi et al., 2008](#)).

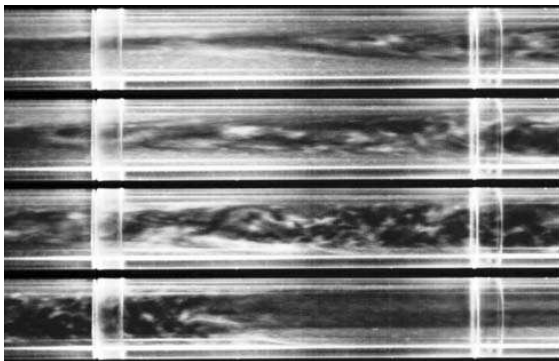


Abbildung 8.45.: Turbulenter Puff für $Re = 2300$ nach [Mullin and Peixinho \(2006\)](#). Die Aufnahme zeigt ein und dasselbe Rohrelement in gleichen Zeitabständen $\Delta t = 1$ s. Die Strömung ist von rechts nach links.

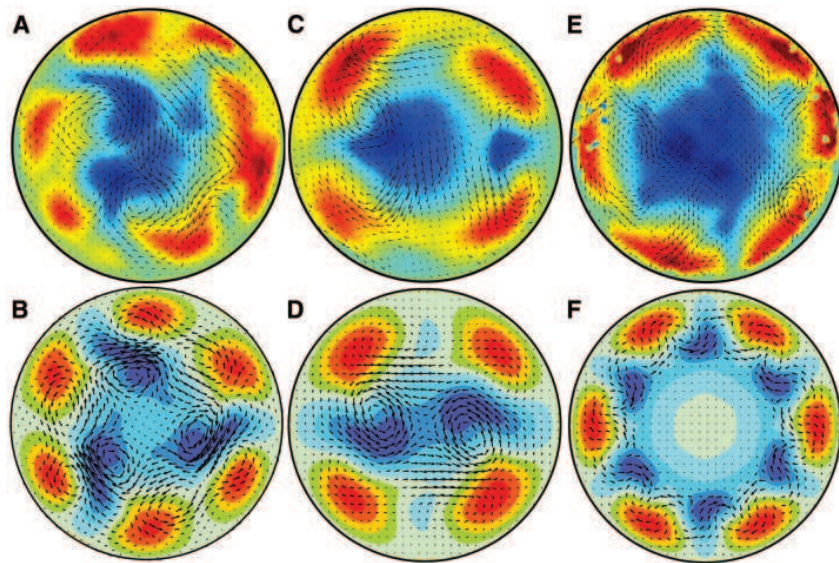


Abbildung 8.46.: Obere Reihe: Mittels PIV gemessene momentane Geschwindigkeitsfelder: (A) turbulenter Puff bei $Re = 2000$, (C) Puff bei $Re = 2500$, (E) turbulenter Zustand bei $Re = 5300$. Untere Reihe: Strukturen von instabilen (periodischen) Wellen-Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung für (B) $Re = 1250$, (D) $Re = 1360$ und (F) $Re = 2900$. Nach Hof et al. (2004).

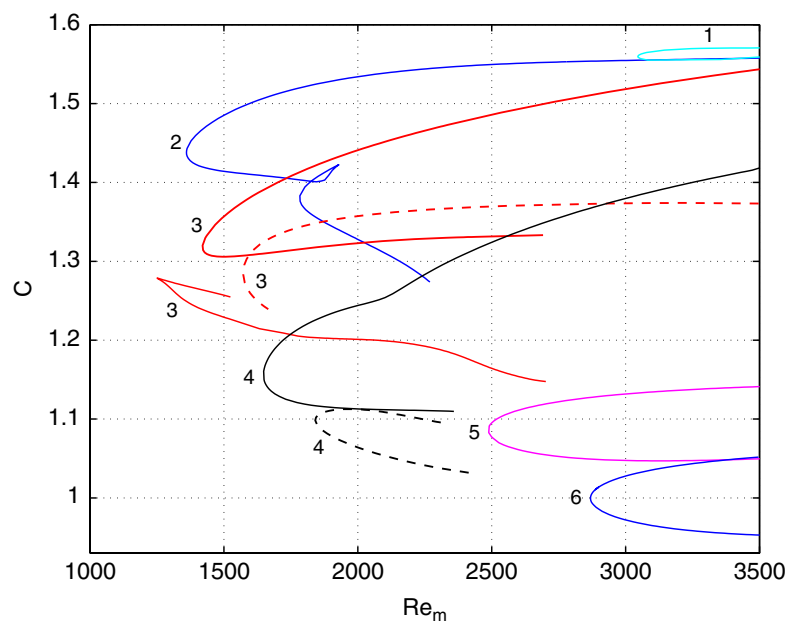


Abbildung 8.47.: Sattel-Knoten-Bifurkationen von nichtlinearen laufenden (periodischen) Wellen mit verschiedenen azimuthalen Periodizitäten m (als Parameter angegeben). Angegeben ist die Phasengeschwindigkeit c der jeweiligen Welle als Funktion der Reynoldszahl $Re_m = Re$ (nach Kerswell, 2005).