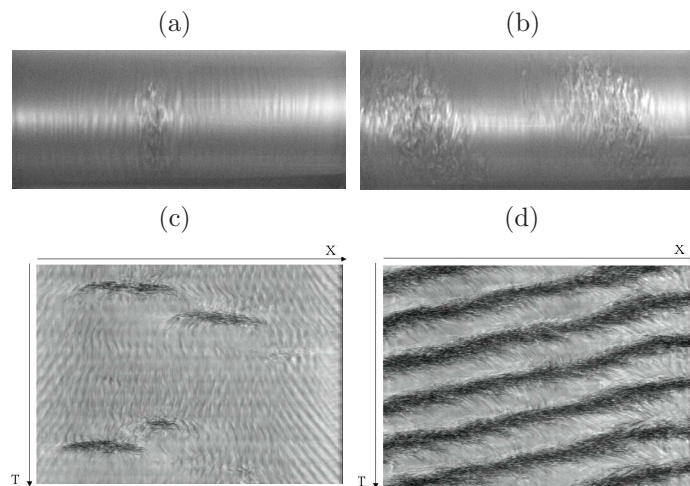


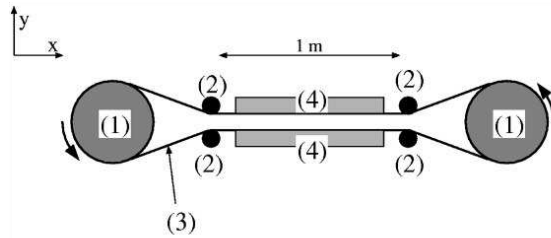
**Abbildung 8.23.:** Entstehung eines turbulenten Flecks nach [Perry et al. \(1981\)](#) (siehe Text).

**Abbildung 8.24.:** Turbulente Flecken und Spiralen (a,b) in der Taylor-Couette-Strömung sowie entsprechende raum-Zeit-Diagramme (c,d) nach [Goharzadeh and Mutabazi \(2001\)](#). Die Reynoldszahlen sind ( $Re_i = 544, Re_a = -1375$ ) (linke Spalte) und ( $Re_i = 611, Re_a = -1375$ ) (rechte Spalte).

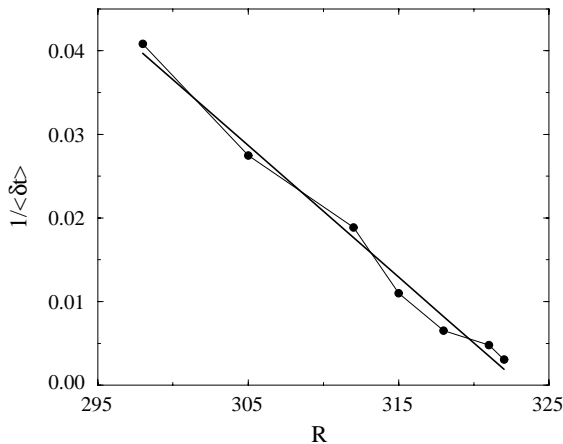


und haben so turbulente Strömungen gezielt angeregt. Dabei wurde der Resonanz bei konstanter Reynoldszahl beobachtet, nachdem eine zuvor aufgeprägte Störung abgeschaltet wurde. In den Experimenten von [Bottin, Daviaud, Manneville and Dauchot \(1998\)](#) (siehe Abb. 8.25) wurde die Störung in Form eines kleinen senkrechten Strahls durch ein kleines Loch in der Glasplatte eingebracht, der genau dann aktiviert wurde, wenn sich auch ein kleines Loch in dem bewegten Plastikband genau unter dem Loch in der Glasplatte befand. In einer zweiten Versuchsserie wurde die Reynoldszahl von einem Wert, bei dem die Strömung voll turbulent ist, auf einen niedrigeren Wert im Übergangsbereich abgesenkt und die Relaxation der

## 8. Übergang zur Turbulenz



**Abbildung 8.25.:** Experiment von Bottin, Dauchot, Daviaud and Manneville (1998).



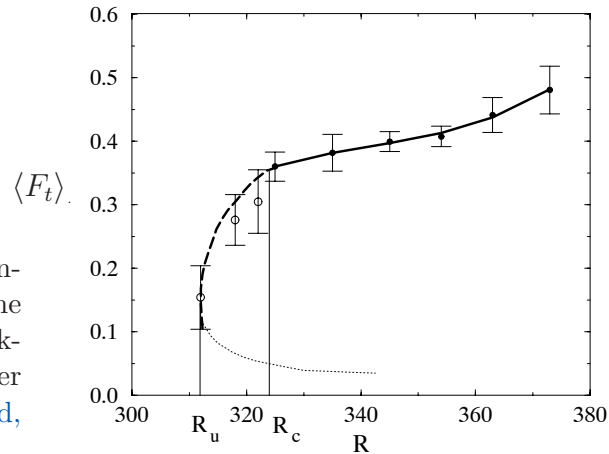
**Abbildung 8.26.:** Inverse mittlere Lebensdauer des turbulenten Zustandes im *sub-kritischen* Bereich der ebenen Couette-Strömung (nach Bottin, Daviaud, Manneville and Dauchot, 1998).

turbulenten Strukturen gemessen.

Oberhalb der Reynoldszahl  $Re_* \approx 323$  blieb der turbulente Zustand für immer (im Rahmen der Meßdauer) erhalten. Unterhalb dieser Reynoldszahl zerfällt der turbulente Zustand und die Strömung wird wieder laminar. Die Wahrscheinlichkeit, bei gegebener Reynoldszahl einen turbulenten Zustand mit der Lebensdauer  $\delta t$  zu finden, zerfällt dabei exponentiell mit  $\delta t$ . Das heißt, lange Lebensdauern sind *exponentiell unwahrscheinlich*.

Die mittlere Lebensdauer  $\langle \delta t \rangle$  der turbulenten Zustände als Funktion der Reynoldszahl ist in Abb. 8.26 gezeigt. Danach divergiert  $\langle \delta t \rangle \sim (Re_* - Re)^{-1}$ , wobei  $Re_*$  die kritische Reynoldszahl bezeichnet, oberhalb der der turbulente Zustand permanent aufrechterhalten bleibt.

Um nun zu einem Bifurkationsdiagramm zu kommen, kann man versuchen, das Ausmaß der Turbulenz zu quantifizieren. In dem hier betrachteten Übergangsbereich besteht eine Möglichkeit darin, den Anteil der Grundfläche zu bestimmen, die mit einer turbulenten Strömung oder mit Streaks überdeckt ist, normiert auf die Gesamtfläche der im Experiment realisierten Couette-Strömung. Das zeitliche Mittel der turbulenten Fläche  $\langle F_t \rangle$  ist in Abb. 8.27 als Funktion der Reynoldszahl dargestellt. In dem Bereich der durchgezogenen Kurve konnten sinnvolle Mittelwerte gemittelt werden, da der turbulente Zustand für sehr lange Zeiten erhalten blieb. Im Bereich der gestrichelten Kurve zerfällt der turbulente Zustand. Es gibt jedoch in dem Reynoldszahlbereich, in dem die Störungen zerfallen (gestrichelte Linie), eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, sehr lange transiente turbulente Zustände zu finden. Für diese langen Transienten (ausgewählte Zerfallsszenarien) wurden die



**Abbildung 8.27.:** Zeitlich gemittelter Anteil der Fläche  $\langle F_t \rangle$ , über welcher die ebene Couette-Strömung turbulent ist, als Funktion der Reynoldszahl basierend auf der halben Kanalhöhe (nach Bottin, Daviaud, Manneville and Dauchot, 1998).

Mittelwerte gemessen und dargestellt. Die gepunktete Linie ist nur konzeptuell zu verstehen, im Sinne eines subkritischen Verhaltens, welches durch raum-zeitliche Intermittenz gekennzeichnet ist. <sup>14</sup>

Zu dem Übergangsbereich mit intermittierenden turbulenten Flecken gibt es, insbesondere für die Rohrströmung, viele neuere Arbeiten, die hier noch eingearbeitet werden müssen.

### 8.3.2. Das BDT-Modell

Baggett et al. (1995) und Trefethen et al. (1992) haben ein simples Modell vorgeschlagen, das die Mechanismen beim Übergang zur Turbulenz verdeutlichen soll. Zunächst soll dieses BDT-Modell motiviert werden (siehe auch Gebhardt and Grossmann, 1994; Großmann, 1995), wobei wir uns noch einmal die Bedeutung der einzelnen Terme in den Navier-Stokes-Gleichungen für die Störungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (8.40)$$

qualitativ verdeutlichen.

$\nabla^2 \mathbf{u}$  Der viskose Term ist immer stabilisierend. Der Operator  $\nabla^2$  ist selbstadjungiert in der Energie-Norm<sup>15</sup> und daher normal. Der Reibungsterm geht mit der Größenordnung  $\mathcal{O}(\text{Re}^{-1})$  ein.

<sup>14</sup>Es kann nicht ganz ausgeschlossen werden, daß auch die turbulenten Zustände für hohe Reynoldszahlen transient sind. Damit wären lange Lebensdauern der turbulenten Zustände verbunden, die jedoch aufgrund der Beschränkung der Länge eines jeden Experiments und jeder numerischen Rechnung bisher nicht experimentell oder numerisch bestimmt werden konnten.

<sup>15</sup>Der zu  $\mathcal{L}$  adjungierte Differentialoperator  $\mathcal{L}^\dagger$  ist definiert durch

$$\langle \mathbf{u} | \mathcal{L} \mathbf{u} \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle, \quad \text{wobei} \quad \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle := \frac{1}{V} \int_V \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} \, dV.$$

Wenn man  $\mathcal{L} = \nabla^2$  einsetzt, sieht man durch zweifache partielle Integration, daß  $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ . Im Fourier-Raum ist das sofort klar, denn  $\nabla^2 \rightarrow -k^2$  und man hat nur eine Multiplikation mit

## 8. Übergang zur Turbulenz

$\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}$  Der Operator  $\mathbf{U} \cdot \nabla$  beschreibt den advektiven Transport von Impuls  $\mathbf{u}$  der Störung mit der Grundströmung  $\mathbf{U}$ . Dieser Prozeß ist energieerhaltend.<sup>16</sup> Für den adjungierten Operator gilt  $(\mathbf{U} \cdot \nabla)^\dagger = -\mathbf{U} \cdot \nabla$ . Da die beiden Operatoren vertauschen (siehe (8.5)), ist auch der Operator  $\mathbf{U} \cdot \nabla$  normal.

$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}$  Der für das transiente Wachstum verantwortliche Term ist der dyadische Operator  $\nabla \mathbf{U} = \partial_i U_j$ . Für Scherströmungen ist er asymmetrisch; bei den hier betrachteten Couette- und Poiseuille-Strömung ist nur das Matrixelement  $\partial U / \partial y$  von Null verschieden. Diese asymmetrischen Matrizen sind im allgemeinen nicht normal. Diese Eigenschaft überträgt sich auf den gesamten linearen Operator. Es ist also dieser Term, der für das transiente Wachstum verantwortlich ist. Der Term  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}$  beschreibt den Transport von Schergradienten der Grundströmung durch die Störung, wodurch die besagten *streaks* gebildet werden.

$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  Der nichtlineare Term schließlich ist energieerhaltend.<sup>17</sup> Er sorgt für eine Umverteilung der Vortizität der Störung (*vortex tilting* und *vortex stretching*). Der zugehörige Operator sollte daher die Operatornorm 1 haben (keine Änderung der Energie) und nur eine Umverteilung bewirken.

Die genannten qualitativen Eigenschaften besitzt das heuristische zweidimensionale BDT-Modell<sup>18</sup> (Baggett et al., 1995)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\text{Re} & 1 \\ 0 & -2/\text{Re} \end{pmatrix}}_A \cdot \mathbf{u} + \|\mathbf{u}\| \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_B \cdot \mathbf{u}. \quad (8.41)$$

Wie wir in Kap. 8.2.2 gesehen haben, wird A mit wachsender Reynoldszahl immer stärker nicht-normal. Die anti-symmetrische Matrix B mit  $B^T = -B$  stellt nur eine Drehung des Vektors  $\mathbf{u}$  dar und liefert keinen Beitrag zum Energiewachstum ( $\mathbf{u} \cdot B \cdot \mathbf{u} = 0$ ). Die Drehrate ist quadratisch nichtlinear. Das Modell beinhaltet also die Möglichkeit eines transienten Wachstums zusammen mit einer nichtlinearen Umverteilung.

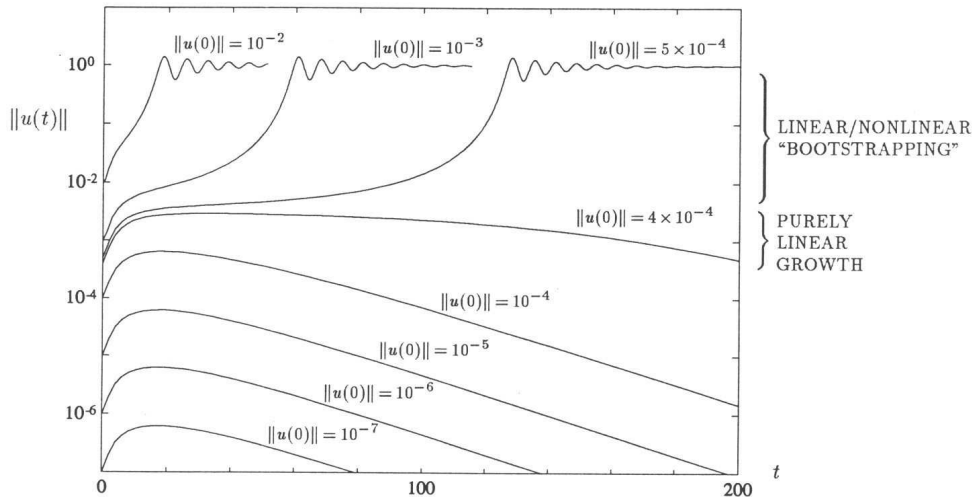
Wir betrachten nun Anfangsstörungen der Form  $\mathbf{u}(0) = (0, \text{const.})^T$ . Der Anfangsvektor zeigt dann in die *ungünstige* Richtung, d.h. in eine Richtung die nahezu senkrecht ist zur Richtung der Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{u}}_1 = (1, 0)^T$  und  $\hat{\mathbf{u}}_2 \sim (\text{Re}, 1)^T$  (vgl. Kap. 8.2.2). Abbildung 8.28 zeigt die Norm  $\|\mathbf{u}(t)\|$  für  $\text{Re} = 25$ . Für

einer reellen Zahl. Die Stabilisierung durch Dämpfung ist um so stärker, je kleinskaliger die Störung ist.

<sup>16</sup>Es ist  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle^{\text{part. Int.}} = -\langle (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}) | \mathbf{u} \rangle$  woraus  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle = 0$  folgt. Im Fourier-Raum ist der advektive Operator  $\mathbf{U} \cdot \nabla \rightarrow i\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}$  rein imaginär (Multiplikation mit einer imaginären Zahl).

<sup>17</sup>Der Druck kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung eliminiert und als quadratische Funktion (Nichtlinearität) von  $\mathbf{u}$  ausgedrückt werden.

<sup>18</sup>Die Matrix A im ersten Summanden entspricht derjenigen aus dem Modellproblem (8.6), hier nur transponiert.



**Abbildung 8.28.:** Zeitverhalten von  $\|\mathbf{u}(t)\|$  nach dem BDT-Modell (8.41) für  $\text{Re} = 25$ . Die Schwellwertamplitude ist  $\|\mathbf{u}(0)\| = 4.22 \times 10^{-4}$ ; nach Trefethen et al. (1992).

Re	transienter linearer Wachst.-Fak. ( $\sim \text{Re}$ )	Schwellw.-Ampl.	Verhältnis zur vorherigen Schwellwertamplitude
12.5	3.18	$3.41 \times 10^{-3}$	
25	6.28	$4.22 \times 10^{-4}$	8.1
50	12.5	$5.27 \times 10^{-5}$	8.0
100	25	$6.58 \times 10^{-6}$	8.0

**Tabelle 8.2.:** Das *bootstrapping* bewirkt, daß bei einem transienten Wachstum ( $\sim \text{Re}$ ) die Schwellwertamplitude im BDT-Modell mit  $\text{Re}^{-3}$  skaliert; nach Trefethen et al. (1992).

$\|\mathbf{u}(0)\| = 4 \times 10^{-4}$  kann man im Zeitverhalten schon schwache nichtlineare Effekte erkennen und für noch stärkere Anfangsstörungen wird eine Schwelle überschritten, so daß die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  nicht mehr zerfällt sondern in die nichtlineare Sättigung kommt ( $\mathbf{u} = O(1)$ ).

In Kapitel 8.2.2 hatten wir festgestellt, daß das transiente Wachstum innerhalb einer Zeit  $O(\text{Re})$  geschieht wobei Anfangsstörungen um einen Faktor  $O(\text{Re})$  verstärkt werden können. Die Schwelle, d. h. die Stärke der Anfangsstörung, bei der die nichtlinearen Effekte einen Umschlag bewirken, sollte daher mit  $\text{Re}^{-1}$  skalieren. Dies ist aber nicht der Fall. Vielmehr skaliert der Schwellwert mit  $\text{Re}^{-3}$  (siehe Tabelle 8.2).

Diese starke Herabsetzung der Schwelle kann man sich folgendermaßen klar machen. Angenommen, der Lösungsvektor der Länge  $\epsilon$  zeigt zum Zeitpunkt  $t = 0$  in die *ungünstige* Richtung, so daß transientes Wachstum möglich ist (die Anfangsbedingung wurde oben so gewählt und entspricht dem rechtsseitigen Singulärvektor von  $A$ ). Nach einer Zeit  $t = O(\text{Re})$  ist die Lösung durch lineares Wachstum auf  $O(\epsilon \text{Re})$

## 8. Übergang zur Turbulenz

angewachsen. Dabei hat sich der Lösungsvektor aber in eine Richtung gedreht, für die es kein lineares Wachstum mehr gibt (diese Richtung entspricht dem linksseitigen Singulärvektor von  $A$ ; vgl. Abb. 8.8). Inzwischen hat aber der nichtlineare Prozeß einen Teil des Vektors wieder in die Richtung für lineares Wachstum gedreht. Die entsprechende Amplitude ist dann  $O[(\epsilon \text{Re})^2 \times \text{Re}]$ , da die Nichtlinearität quadratisch ist und die Zeitskala proportional zu  $\text{Re}$ . Falls nun  $\text{Re}^3 \epsilon^2$  von kleinerer Größenordnung ist als  $\epsilon$ , hat sich die Amplitude effektiv verringert und die Lösung wird abklingen. Wenn aber  $\text{Re}^3 \epsilon^2 > \epsilon$  ist, wurde innerhalb der Zeit  $O(\text{Re})$  netto Energie gewonnen und es kommt über den beschriebenen Rückkopplungsprozeß zu einem Amplitudenwachstum. Aus diesem Grund skaliert die Schwellwertamplitude im BDT-Modell mit  $O(\text{Re}^{-3})$ . Dieser Prozeß wird auch *nonlinear bootstrapping* genannt.<sup>19</sup>

Das *bootstrapping* ist im Grunde ein linearer Effekt, da die Nichtlinearität nur die Energie umverteilt und keine Energie aus einem Reservoir hinzufügt. Der *bootstrapping*-Mechanismus hängt nicht von der genauen Form der Nichtlinearität ab. Jede Nichtlinearität, die Energie von zerfallenden in wachsende Komponenten der Lösung umverteilt ist geeignet. Für Nichtlinearitäten mit höheren Potenzen in  $\mathbf{u}$  kann die Schwelle jedoch anders skalieren (z. B. ist sie  $O(\text{Re}^{-2})$  für kubische Nichtlinearitäten).

Natürlich sind die Navier-Stokes-Gleichungen komplizierter als das BDT-Modell. Dies liegt daran, daß unendlich viele und nicht nur zwei Freiheitsgrade beteiligt sind. Außerdem können Moden mit verschiedenen Wellenzahlen miteinander wechselwirken, so daß Nichtlinearitäten höherer Ordnung ( $> 2$ ) betrachtet werden müssen. Man kann jedoch argumentieren, daß es immer eine gewisse Energie in Pseudo-Moden gibt, so daß für hinreichend lange Ausbreitungsstrecken (in  $x$ -Richtung) zufällige Fluktuationen lokal über das statistische Mittel verstärkt werden. Auch räumliche Phänomene wie etwa die raumzeitliche Intermittenz (Kap. 8.3.1) kann das BDT-Modell nicht wiedergeben. Das Modell hat daher mehr pädagogischen Wert und soll nur die prinzipiellen Mechanismen verdeutlichen.

Auch bei der Taylor-Couette-Strömung mit gegensinnig rotierenden Zylindern ist transientes Wachstum möglich (der linearisierte Navier-Stokes-Operator ist nicht-normal, siehe Abb. 8.6); vgl. Gebhardt and Grossmann (1994). Beim Rayleigh-Bénard-System oder beim Taylor-Couette-System mit Innenrotation sind die ersten Instabilitäten stationär ( $\mathcal{L}$  ist selbstadjungiert und deshalb normal). Die linearisierten Operatoren für höhere Instabilitäten sind aber nicht-normal, so daß auch für höhere Instabilitäten (eines eventuell komplizierten laminaren Zustands) transientes Wachstum möglich ist und die damit verbundene Sensitivität des Umschlags zur Turbulenz. Die sukzessiven Instabilitäten mögen damit zwar ins Chaos führen, nicht aber in die eigentliche Turbulenz, die mit dem oben beschriebenen *bootstrapping* verbunden sein könnte.

---

<sup>19</sup>*Bootstrap*: Angenähete Lasche am Stiefel. Damit wird ausgedrückt, daß die Nichtlinearität dafür sorgt, daß die Störung in die *Schluffen* kommt.



### 8.3.3. Das Modell von Waleffe (1995)

Das BDT-Modell ist im wesentlichen von heuristischem Wert. Denn die vorhergesagte Skalierung der Sensitivitätsschwelle mit  $\epsilon \sim \text{Re}^{-3}$  ist nicht korrekt. Numerisch scheint die kritische Störamplitude wie  $\text{Re}^{-5/4}$  (Couette) bzw. wie  $\text{Re}^{-7/4}$  (Poiseuille) zu skalieren (Baggett et al., 1995). Daher scheint insbesondere bei der Couette-Strömung das *bootstrapping* sehr schwach zu sein. Ein anderer Kritikpunkt ist die Art der Nichtlinearität, denn der nichtlineare Term mit  $\|\mathbf{u}\|$  in (8.40) kann streng genommen nicht aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitet werden.

Ein anderes Modell (Waleffe, 1995) orientiert sich stärker an den wesentlichen Eigenschaften paralleler wandbegrenzter Scherströmungen, die man gemessen und in numerischen Simulationen gefunden hat. Dabei sollte die Existenz eines nichtlinearen Attraktors wichtig sein, denn alles transiente Wachstum sollte nicht zur Turbulenz führen, wenn es keinen entsprechenden *Attraktor* gibt.

Das Modell von Waleffe (1995) umfaßt vier Gleichungen für

1. die Amplitude der **streaks** ( $u$ ),
2. die Amplitude der **Wirbel** mit Achse in Stromrichtung ( $v$ ),
3. die Amplitude der **Streak-Instabilität** ( $w$ ), und
4. die Amplitude der **mittleren Scherrate** ( $m$ ), die das System antreibt.

Das dynamische System lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ m \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma \end{pmatrix}}_{\text{(I)}} - \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} \lambda u \\ \mu v \\ \nu w \\ \sigma m \end{pmatrix}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma w & v \\ 0 & 0 & \delta w & 0 \\ \gamma w & -\delta w & 0 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{(III)}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ m \end{pmatrix} \quad (8.42)$$

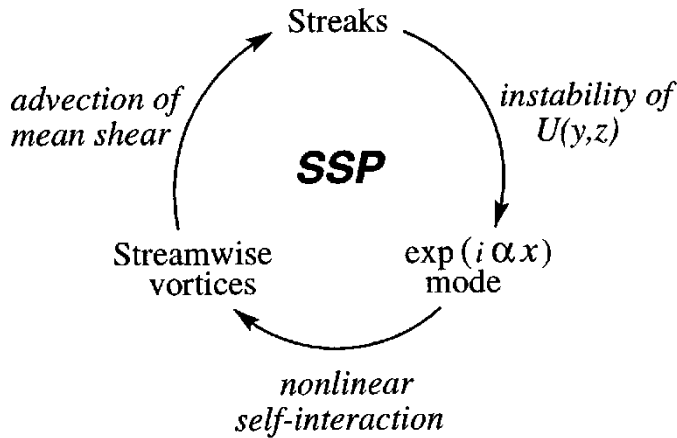
Die Dämpfungsparameter  $(\lambda, \mu, \nu, \sigma) > 0$  sind alle positiv, und die nichtlinearen Kopplungsparameter  $(\gamma, \delta)$  haben dasselbe Vorzeichen.

Hierbei stellt (I) eine Inhomogenität dar, die den Antrieb modelliert (Stärke der Scherströmung). (II) ist der lineare Dämpfungsterm und (III) ist eine antisymmetrische Nichtlinearität. Aufgrund der Anti-Symmetrie wird alle Energie, die einem Freiheitsgrad entzogen wird, wieder einem anderen Freiheitsgrad mit entsprechender Amplitude hinzugefügt.<sup>20</sup> Der Term  $-uv$  in der Gleichung für  $m$  spielt die Rolle einer Reynolds-Spannung.

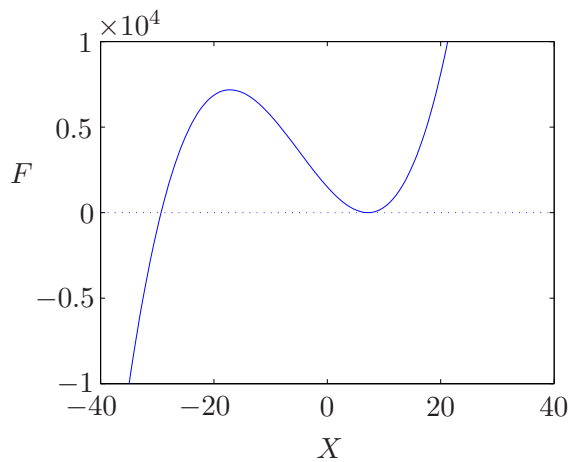
Die Wirbel in Stromrichtung  $v$  transportieren mittlere Scherung  $m$  und erzeugen so die *streaks*  $u$ . Die *streaks* werden instabil, da aufgrund der mittleren Scherung lokale Wendepunkte im Profil auftauchen (Rayleigh's Wendepunkt-Kriterium (6.30)). Die daraus resultierende Instabilität besteht zumeist aus Geschwindigkeitsfeldern

<sup>20</sup>Falls  $A$  antisymmetrisch ist, ist die Energie-Änderung  $\sim \mathbf{u} \cdot A \cdot \mathbf{u} = 0$ .

## 8. Übergang zur Turbulenz



**Abbildung 8.29.:** Selbst-erhaltender turbulenter Prozeß nach [Waleffe \(1997\)](#).



**Abbildung 8.30.:** Die positiven Nullstellen von  $F(X)$  nach (8.44) stellen stationäre Lösungen des Waleffe-Modells dar. Hier ist  $F(X)$  für  $\text{Re} = 98.7$  gezeigt. Für  $\text{Re} \gtrsim 98.7$  treten zwei neue reelle stationäre Lösungen auf.

in Spannrichtung  $w$ , die in Stromrichtung moduliert sind und welche die Rollen in Stromrichtung  $v$  verstärken. Dies ist — grob gesagt — der Rückkopplungsprozeß, der dem Waleffe-Modell zugrunde liegt und der in [Abb. 8.29](#) symbolisch dargestellt ist.

Mit der Zerlegung  $(u, v, w, m) = (0, 0, 0, 1) + (u, v, w, n)$ , wobei  $(0, 0, 0, 1)$  der laminare Grundzustand ist, kann man das System auch schreiben als ([Henningson, 1996](#))

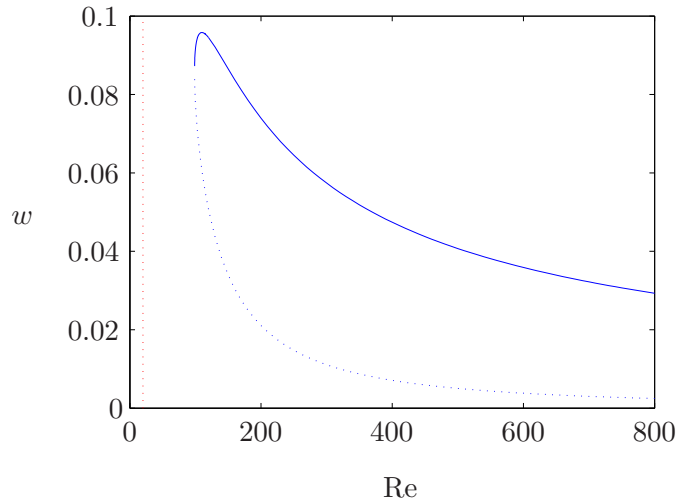
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} -\lambda & \text{Re} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma w & v \\ 0 & 0 & \delta w & 0 \\ \gamma w & -\delta w & 0 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ n \end{pmatrix} \quad (8.43)$$

In dieser Form sieht man direkt wieder die Nicht-Normalität des linearen Operators.

Das Modell (8.42) hat den trivialen Fixpunkt  $(u, v, w, m) = (0, 0, 0, 1)^T$  (bzw.  $(u, v, w, n) = (0, 0, 0, 0)^T$  in (8.43)), welcher der laminaren Strömung entspricht (reine Scherströmung). An (8.43) sieht man direkt, daß dieser Fixpunkt immer linear stabil ist. Darüber hinaus existieren aber noch andere nichttriviale Fixpunkte



**Abbildung 8.31.:** Bifurkationsdiagramm für das 4-Moden-Waleffe-Modell. Gezeigt ist die *streak*-Amplitude  $w$  entsprechend der nicht-trivialen stationären Lösung von (8.42). Ähnliche Bifurkations-Kurven für  $\gamma < 0.5$  finden sich innerhalb der gezeigten Lösungsäste. Die rote gepunktete Linie deutet das Energie-Limit für das Waleffe-Modell an; hier  $\text{Re}_E = 2\sqrt{\lambda\mu} = 20$ .



$(u_0, v_0, w_0, m_0)$ . Sie sind Lösungen der kubischen Gleichung

$$F(X) = \delta^4 X^3 + \nu \delta^2 X^2 + (\mu \gamma^2 + \lambda \delta^2 - \gamma \delta \text{Re}) \sigma X + \lambda \nu \sigma = 0, \quad (8.44)$$

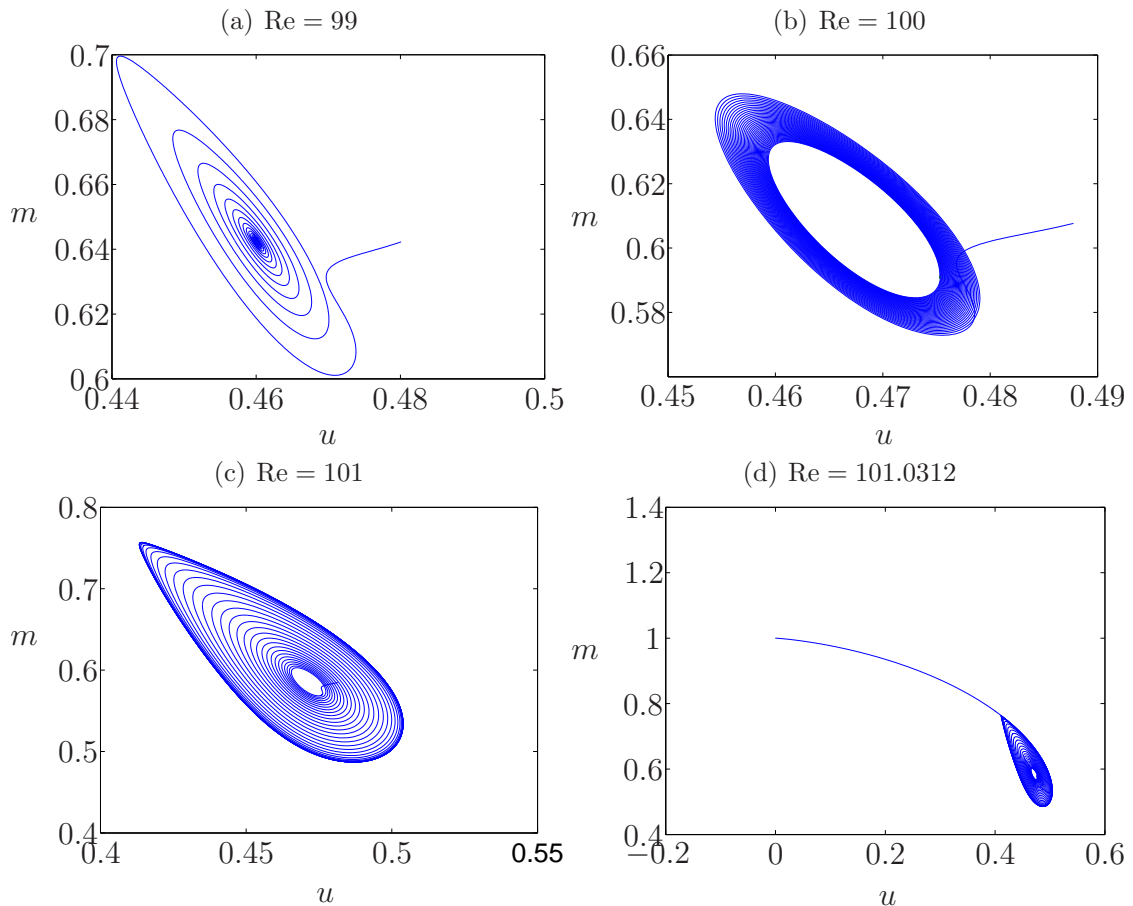
wobei  $X = (\text{Re}^2/\mu)w_0$  ist. Als repräsentatives Beispiel wählen wir im folgenden die Parameter  $\lambda = \mu = \sigma = 10$ ,  $\nu = 15$ ,  $\delta = 1$  und  $\gamma = 0.5$ . Die Funktion  $F(X)$  ist in Abb. 8.30 für  $\text{Re} = 98.7$  geplottet. Bei einer Erhöhung der Reynoldszahl tauchen zwei nichttriviale reelle positive Wurzeln (Lösungen) auf, die in Abb. 8.31 als Funktion von  $\text{Re}$  dargestellt sind.

Für die genannten Parameter findet eine *Sattel-Knoten-Bifurkation* (*saddle-node bifurcation*) bei  $\text{Re}_c = 98.6325$  statt. Der untere Lösungsast ist dabei ein Sattelpunkt (gepunktet) und ist immer instabil. Der obere Ast ist ein stabiler Knoten, der aber schon bei  $\text{Re} = 100.0232$  seine Stabilität verliert. Dies geschieht über eine superkritische Hopf-Bifurkation, wobei ein stabiler Grenzzyklus auftaucht. Bei Erhöhung von  $\text{Re}$  kollidiert der Grenzzyklus (*limit-cycle*) bei  $\text{Re} = 101.0311$  mit dem Sattelpunkt und es kommt zu einer *homoklinen Bifurkation*. Die meisten Trajektorien landen dann auf der trivialen Lösung  $(u, v, w, m) = (0, 0, 0, 1)$ . Die zweidimensionale Projektion repräsentativer Trajektorien ist in Abb. 8.32 gezeigt. Eine schematische Darstellung der Struktur des Flusses ist vereinfachend für zwei Dimensionen in Abb. 8.33 gezeigt.

Für noch höherer Reynoldszahlen taucht ein anderer stabiler Grenzzyklus auf, der über homokline Bifurkationen entsteht und auch wieder verschwindet. Für  $\text{Re} = 357$  ist ein Beispiel in Abb. 8.34 gezeigt. Die Spitze des Grenzzyklus am oberen Bildrand befindet sich in der Nähe des hyperbolischen Fixpunktes (Sattelpunkt, unterer Ast in Abb. 8.31). Für sehr große Reynoldszahlen wird die stationäre nichttriviale Lösung  $(u_0, v_0, w_0, m_0)$  wieder stabil.

Die stationäre Lösung (oberer Ast in Abb. 8.31) könnte zum Beispiel der von Nagata (1990) gefundenen nichttrivialen Lösung für die ebene Couette-Strömung entsprechen. Die Analogie gilt insbesondere für den Bereich kleiner Reynoldszahlen  $\text{Re} \approx 150$ . Für diese Reynoldszahlen haben Clever and Busse (1997) gezeigt, daß

## 8. Übergang zur Turbulenz

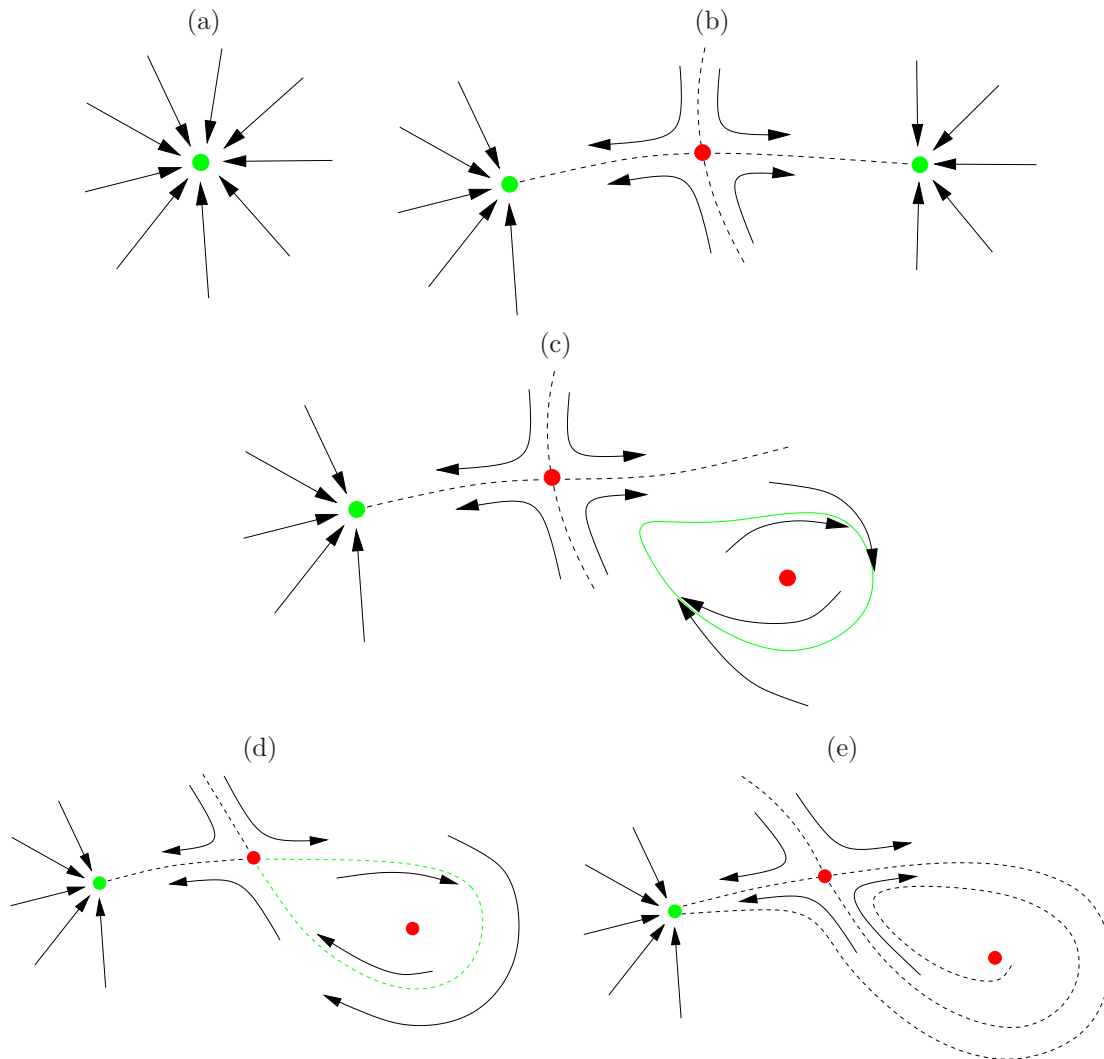


**Abbildung 8.32.:** Projektion der vierdimensionalen Dynamik des Waleffe-Modells auf den zweidimensionalen Unterraum  $(u, m)$ . (a) Stabiler Knoten für  $Re = 99$  entsprechend dem oberen Lösungszweig in Abb. 8.31. (b) Noch so eben stabiler Knoten für  $Re = 100$ . (c) Stabiler Grenzzyklus nahe seiner Existenzgrenze (homoklinen Bifurkation) für  $Re = 101$ . Der hyperbolische Fixpunkte befindet sich in der Nähe der Spitze der Trajektorien. (d) Nach der homoklinen Bifurkation ist der Grenzzyklus verschwunden. Für  $Re = 101.0312$  landet das System für  $t \rightarrow \infty$  auf dem trivialen Fixpunkt  $(0, 0, 0, 1)$ . Für alle Trajektorien wurden die Anfangsbedingungen  $(u, v, w, m) = (u_0 + 0.01, v_0, w_0, m_0)$  gewählt, wobei  $(u_0, v_0, w_0, m_0)$  der stabile Knoten ist (oberer Lösungszweig in Abb. 8.31).

die Lösungen von Nagata (1990) nur in einem kleinen Parameterbereich stabil ist und für höhere Reynoldszahlen instabil.

### 8.3.4. Exakte stationäre Zustände in parallelen Scherströmungen

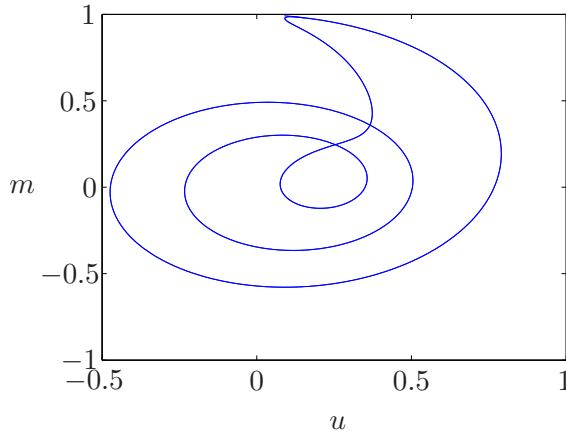
Im obigen Modell von Waleffe (1995) sind einige wichtige Charakteristika der mittleren turbulenten Couette- oder Poiseuille-Strömung enthalten. Ein wesentliches Element war die Existenz einer instabilen stationären Lösung.



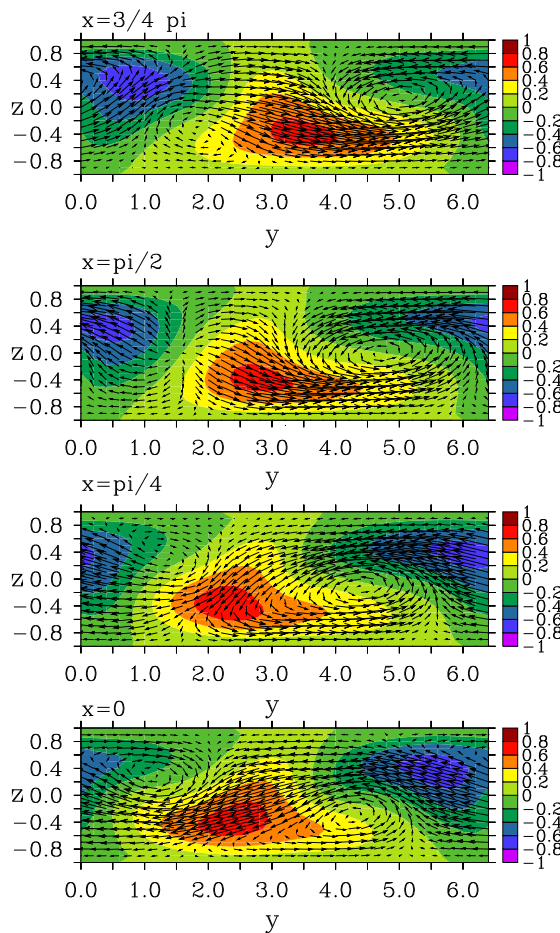
**Abbildung 8.33.:** Die schematische Darstellung der Projektion der 4-dimensionalen Phasenraumdynamik nach (8.42) auf 2 Dimensionen zeigt die Sequenz bei einer Erhöhung der Reynoldszahl. **Rot:** Instabile Fixpunkte, **Grün:** Stabile Fixpunkte und stabile Grenzzyklen. (a) Der Grundzustand ist die einzige Lösung. Sie ist stabil. (b) Es tauchen zusätzlich zwei nichttriviale Lösungen (stabil und instabil) über eine Sattel-Knoten-Verzweigung auf. (c) Die nicht-triviale stabile Lösung wird instabil und es entsteht ein stabiler Grenzzyklus. (d) Homokline Bifurkation: Der stabile Grenzzyklus kollidiert mit dem instabilen Sattelpunkt. (e) Alle Anfangswerte landen wieder auf dem Grundzustand.

Schon Nagata (1990) hatte eine Sattel-Knoten-Bifurkation für die ebene Couette-Strömung bei  $Re = 129.75$  gefunden (siehe auch Clever and Busse, 1992, 1997), ganz ähnlich wie in dem Modell von Waleffe (1997) (siehe Abb. 8.31). Um diese Lösungen numerisch zu finden, wurde das Problem der ebenen Couette-Strömung in die größere Problemklasse des Taylor-Couette-Systems eingebettet, für welche man Bifurkationen aus dem Grundzustand kennt. Die bifurkierenden Lösungen wurden

## 8. Übergang zur Turbulenz



**Abbildung 8.34.:** Stabiler Grenzzyklus für  $Re = 357$ .



**Abbildung 8.35.:** Geschwindigkeitsfeld (Pfeile) und *streaks* (Farbe) einer typischen stationären dreidimensionalen Lösung in der Couette-Strömung am Bifurkationspunkt bei  $Re = 125$  mit der NBC-Symmetrie nach [Schmiegel \(1999\)](#) und mit den Wellenzahlen  $k_x = 1$  und  $k_z = 0.5$  (in Einheiten des inversen Plattenabstands). Dargestellt sind vier Schnitte äquidistant über eine halbe Wellenlänge in  $x$ -Richtung. Der Grundzustand wurde abgezogen. Beachte, daß [Schmiegel \(1999\)](#) andere Koordinaten als wir benutzt ( $y \leftrightarrow z$ ).

dann bei Variation des Radienverhältnisses zu  $\eta \rightarrow 0$  verfolgt. Diese Methode nennt man heute *Homotopie-Methode*. Die stationäre Lösung, die bei  $Re = 129.75$  entsteht, wird über eine Hopf-Bifurkation schon bei  $Re = 135$  instabil. Diese Lösungen haben aber anscheinend keine große Bedeutung für den Turbulenzübergang, da sie in Gebieten des Phasenraums liegen, die nur von spezielle Störungen erreicht werden können (vgl. Abb. 8.32d).

Schmiegel (1999) haben eine ganze Vielzahl von instabilen stationären dreidimensionalen Lösungen in der ebenen Couette-Strömung berechnet (siehe auch Eckhardt et al., 1998). Die stationären Lösungen wurden als Superposition von Harmonischen (in  $x$ - und  $z$ -Richtung) und Legendre-Polynomen (in  $y$ -Richtung) dargestellt, wobei die Randbedingungen mit Hilfe einer Lagrange-Methode eingebunden wurden. Die resultierenden Gleichungen ließen sich mit einem einfachen Newton-Raphson-Verfahren lösen. Um gute Anfangsbedingungen für die Iteration zu erhalten, wurden Daten aus numerischen Turbulenz-Simulationen verwendet. Zur Berechnung der Lösungsäste bei Variation der Reynoldszahl wurde das Pittsburger Verfolgungsverfahren PITCON eingesetzt (Reinboldt and Burkardt, 1983b,a) (siehe auch Reinboldt 88/98). Dabei konnten auch vielfältige Lösungsverzweigungen gefunden werden, die alle vom Gabel- oder Sattel-Knoten-Typus waren.

Im Gegensatz zu den Lösungen des Waleffe-Modells sind die exakten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen, z.B. für die Couette-Strömung, in der Tat durch Vortizität in Stromrichtung und starke *streak*-Strukturen gekennzeichnet. Die Instabilität der stationären Lösungen basiert auf dem *lift-up*- und *streak-break-down*-Mechanismus. Ein Beispiel ist in Abb. 8.35 gezeigt. Das entsprechende Profil der mittleren Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung hat dabei einen klaren Wendepunkt (nicht gezeigt). Zur ökonomischen numerischen Lösung wurden Symmetrien der Gleichungen und Lösungen ausgenutzt. Die gezeigte Lösung besitzt dieselbe Symmetrie, die auch von Nagata, Busse und Clever (in Schmiegel (1999) als NBC-Symmetrie bezeichnet) angenommen wurde.<sup>21</sup>

Die Lösungszweige für realistische Randbedingungen (*no-slip*) sind in Abb. 8.36 dargestellt. Alle Lösungen sind instabil. Eine Ausnahme bildet nur die aus einer Sattel-Knoten Bifurkation hervorgegangene NBC-Lösung (Nagata, 1990) in der Nähe der Bifurkation (linker schwarzer Ast in Abb. 8.36a). Es gibt Anzeichen dafür, daß es auch exakte zeitperiodische Lösungen gibt, die auch linear instabil sind.

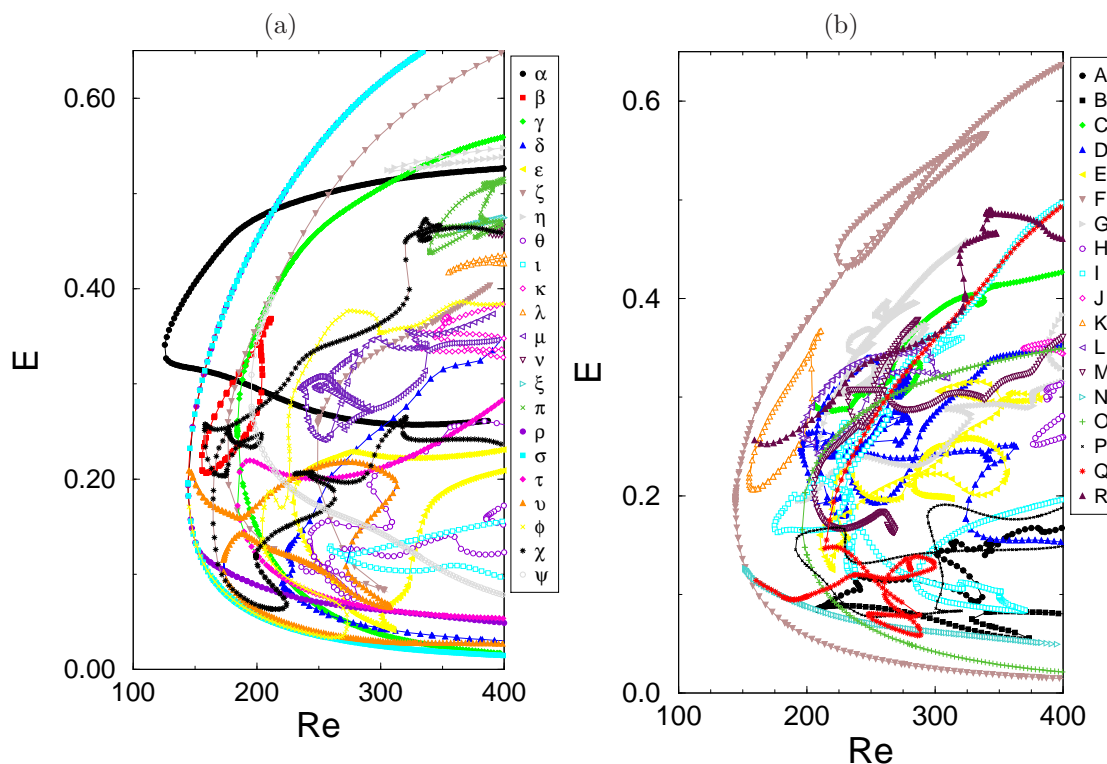
Nach diesen Ergebnissen kann man die folgende Vorstellung entwickeln. Fast alle Eigenwerte des linearen Stabilitätsproblems für die nicht-trivialen stationären Lösungen der Couette-Strömung entsprechen instabilen Richtungen im Phasenraum. Typischerweise ist nur ein oder wenige Eigenwerte (Richtungen) stabil (instabiler Sattelpunkt). Der Zustand der Strömung ist durch einen Punkt im Phasenraum gekennzeichnet. Wenn sich das System im turbulenten Zustand bei relativ niedrigen

<sup>21</sup>Die NBC-symmetrischen Lösungen weisen die folgenden Symmetrien auf (bzgl. unserer Koordinaten)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (x, y, z) &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ -w \end{pmatrix} (x + L_x/2, y, -z), \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (x, y, z) &= \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ w \end{pmatrix} (-x, -y, z + L_z/2), \end{aligned}$$

wobei  $L_x$  und  $L_z$  die Wellenlängen in  $x$ - und in  $z$ -Richtung sind.

## 8. Übergang zur Turbulenz



**Abbildung 8.36.:** Instabile stationäre Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen für die ebene Couette-Strömung nach Schmiegel (1999). Die Lösungen sind durch ihre Energie  $E$  charakterisiert und nach zwei verschiedenen Symmetrie-Gruppen geordnet (a): NBC-Typ und (b) I-Typ.

Reynoldszahlen befindet, wird dieser Punkt (Zustand) durch ein Gewirr instabiler Lösungen abwechselnd abgestoßen und angezogen. Der Punkt (Zustand) bewegt sich so in irregulärer Weise durch ein in Abb. 8.36 nur teilweise gezeigtes Skelett von Repelloren und Sattelpunkten. Eventuell fällt das System irgendwann wieder in den laminaren Zustand zurück. Falls das transiente Wachstum aber hinreichend stark ist, wird das System wieder in das Gebiet zurückgeworfen, in dem die Dynamik durch die abstoßende Wirkung der exakten instabilen Lösungen gekennzeichnet ist.

Durch die Anwesenheit dieser komplizierten Attraktor/Repellor-Struktur ist der Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung vermutlich fraktal. Die Lebensdauer turbulenter Zustände ist für ein und dieselbe Form der Anfangsbedingung in Abb. 8.37 gezeigt. Die Peaks haben *keine* endliche Breite. Wenn man das Gebirge auf einer stark verkleinerten Reynoldszahl- und Anfangsamplituden-Skala betrachtet, ergibt sich ein ähnliches Gebirge (selbstähnlich, Fraktal).