

(1992) haben das asymptotische Verhalten verschiedener charakteristischer Größen berechnet. So verhält sich z.B. der Abstand des Spektrums von der reellen Achse wie $\sim (\text{Re}/2.47)^{-1}$, wenn man die TS-Wellen nicht berücksichtigt (Couette- und auch Poiseuille-Strömung, bei $k_x = k_z = 0$).

8.2.9. Berechnung optimaler transienter Störungen

Optimale Störungen sind Störungen, die zum maximalen Energiewachstum führen. Diese Störungen wurden von Butler and Farrell (1992) für die ebene Couette- und Poiseuille-Strömung berechnet. Die verwendete Technik soll kurz beschrieben werden. Die Reynoldszahl wird hier als

$$\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu}, \quad (8.22)$$

definiert, wobei U_0 die maximale Geschwindigkeit der Grundströmung ist und L die halbe Kanalweite. Es werden die Grundströmungen $\mathbf{U} = y\mathbf{e}_x$ (Couette) und $\mathbf{U} = (1-y^2)\mathbf{e}_x$ (Poiseuille) betrachtet. Die Berandung befindet sich in beiden Fällen bei $y = \pm 1$. Die linearisierte Entwicklungsgleichung für die Störung \mathbf{u} lauten dann

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (8.23)$$

Bilden der Divergenz führt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung auf die *Poisson-Gleichung* für den Druck¹²

$$\nabla^2 p = -2U' \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.24)$$

Wenn man ∇^2 auf die y -Komponente der Impulsgleichung (8.23) anwendet und die Poisson-Gleichung (8.24) verwendet, um den Druck zu eliminieren, erhält man

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 - U'' \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \right] v = 0. \quad (8.25)$$

Außerdem findet man für die Vortizität in y -Richtung $\omega = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \omega = -U' \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (8.26)$$

¹²Es ist

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}) &\stackrel{\mathbf{U}=U(y)\mathbf{e}_x}{=} \nabla \cdot (U \partial_x \mathbf{u} + v \partial_y \mathbf{U}) \stackrel{\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{U} = 0}{=} (\nabla U) \partial_x \cdot \mathbf{u} + (\nabla v) \partial_y \cdot \mathbf{U} \\ &= U' \mathbf{e}_y \partial_x \cdot \mathbf{u} + \partial_x v U' = 2U' \partial_x v. \end{aligned}$$

8. Übergang zur Turbulenz

Die beiden Gleichungen beschreiben das System vollständig. Die Geschwindigkeitskomponenten u und w ergeben sich aus v und ω als

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (8.27a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}\right). \quad (8.27b)$$

Wenn wir nun Normalmoden einführen

$$v(\mathbf{x}, t) = \tilde{v}(y) e^{\sigma t + i(k_x x + k_z z)}, \quad (8.28a)$$

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \tilde{\omega}(y) e^{\sigma t + i(k_x x + k_z z)}, \quad (8.28b)$$

erhalten wir das Eigenwertproblem

$$\sigma \nabla^2 \tilde{v} = \left(-ik_x U \nabla^2 + ik_x U'' + \frac{\nabla^4}{\text{Re}}\right) \tilde{v}, \quad (8.29a)$$

$$\sigma \tilde{\omega} = \left(-ik_x U + \frac{\nabla^2}{\text{Re}}\right) \tilde{\omega} - ik_z U' \tilde{v}, \quad (8.29b)$$

mit $\nabla^2 = \partial_y^2 - k^2$ und $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ und den Randbedingungen $\tilde{\omega} = \tilde{v} = \partial_y \tilde{v} = 0$ auf $y = \pm 1$. Die erste Gleichung ist die klassische *Orr-Sommerfeld-Gleichung* (vgl. 6.73) und die zweite ist die sogenannte *Squire-Gleichung*. Die Eigenmoden für dieses Problem sind diskret und vollständig. Eine beliebige anfängliche Störung ist daher als Superposition einer hinreichenden Anzahl von Normalmoden darstellbar. Wir betrachten hier Störungen zu festem k_x und k_z

$$v = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{2N} \gamma_j \tilde{v}_j(y) e^{\sigma_j t}\right)}_{=\hat{v}(t)} e^{i(k_x x + k_z z)}, \quad (8.30a)$$

$$\omega = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{2N} \gamma_j \tilde{\omega}_j(y) e^{\sigma_j t}\right)}_{=\hat{\omega}(t)} e^{i(k_x x + k_z z)}, \quad (8.30b)$$

wobei γ_j die Wichtung der j -ten Normalmode ist. Die diskretisierten Gleichungen (8.29a) und (8.29b) kann man auch in der kompakten Form schreiben

$$\sigma \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad (8.31)$$

wobei der sogenannte *Orr-Sommerfeld*-, der *Squire*- und der *Kopplungsoperator* durch

$$\mathcal{L} = \nabla^{-2} \left(-ik_x U \nabla^2 + ik_x U'' + \frac{\nabla^4}{\text{Re}} \right), \quad (8.32a)$$

$$\mathcal{S} = \left(-ik_x U + \frac{\nabla^2}{\text{Re}} \right), \quad (8.32b)$$

$$\mathcal{C} = -ik_z U', \quad (8.32c)$$

gegeben sind. Bei Angabe entsprechender Randbedingungen ist ∇^{-2} wohldefiniert. Man erkennt, daß die Operator-Matrix nicht-normal ist, wenn der Kopplungsoperator $\mathcal{C} \neq 0$. Die Eigenmoden sind daher nicht orthogonal und man kann transientes Wachstum erwarten.

Da wir an optimalem Energiewachstum interessiert sind, müssen wir die mittlere reelle Energie betrachten (das periodische Volumen ist $V = 8\pi^2/(k_x k_z)$)

$$E = \frac{1}{2V} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/k_x} \int_0^{2\pi/k_z} (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz. \quad (8.33)$$

Zur Berechnung benötigen wir die reellen Geschwindigkeiten, die wir aus den komplexen Größen (8.30a) und (8.30b) erhalten, z.B.

$$v = \Re [\hat{v} e^{i(k_x x + k_z z)}] = \frac{1}{2} [\hat{v} e^{i(k_x x + k_z z)} + \hat{v}^* e^{-i(k_x x + k_z z)}]. \quad (8.34)$$

Beim Quadrieren und integrieren über x und z überlebt nur der gemischte Term $\hat{v} \hat{v}^*$ (die anderen Terme verschwinden im Mittel, weil sie im Raum oszillieren) und es bleibt

$$E = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left[\hat{v}^* \hat{v} + \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial \hat{v}^*}{\partial y} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \hat{\omega}^* \hat{\omega} \right) \right] dy, \quad (8.35)$$

wobei nach (8.27a) und (8.27b) u und w mittels

$$u = -\frac{i}{k^2} \left(k_z \omega - k_x \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (8.36a)$$

$$w = \frac{i}{k^2} \left(k_x \omega + k_z \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (8.36b)$$

Tabelle 8.1.: Globale Optima für die ebene Couette-Strömung; nach [Butler and Farrell \(1992\)](#). Man sieht, daß der optimale Wellenvektor vorwiegend in die z -Richtung zeigt.

Re	τ	k_x	k_z	E_τ/E_0
4 000	467	0.0088	1.60	18 956
2 000	234	0.0175	1.60	4 739
1 000	117	0.035	1.60	1 184.6
500	59	0.067	1.60	296.0
250	30.2	0.12	1.61	73.9
125	16.1	0.144	1.63	18.55
62.5	8.2	0.0024	1.65	4.87
31.25	3.21	0	1.62	1.50

8. Übergang zur Turbulenz

eliminiert wurden. Die Störung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist durch den Vektor der Wichtungsvektoren $\gamma = \gamma_j$ bestimmt. Unter Benutzung der Abkürzungen $V_t = \tilde{v}_{mj}e^{\sigma_j t}$ und $\Omega_t = \tilde{\omega}_{mj}e^{\sigma_j t}$ (m bezeichnet die Gitterpunkte im Abstand Δy in y -Richtung) erhält man die diskretisierte Form der Energie

$$E(t) = \frac{\Delta y}{8} \left[\gamma^* \cdot V_t^* V_t \cdot \gamma + \frac{1}{k^2} \left(\gamma^* \cdot \frac{\partial V_t^*}{\partial y} \frac{\partial V_t}{\partial y} \cdot \gamma + \gamma^* \cdot \Omega_t^* \Omega_t \cdot \gamma \right) \right] = \gamma^* \cdot E_t \cdot \gamma, \quad (8.37)$$

wobei über die Indizes m und j zu summieren ist. Die Matrix E_t ist hermitesch.

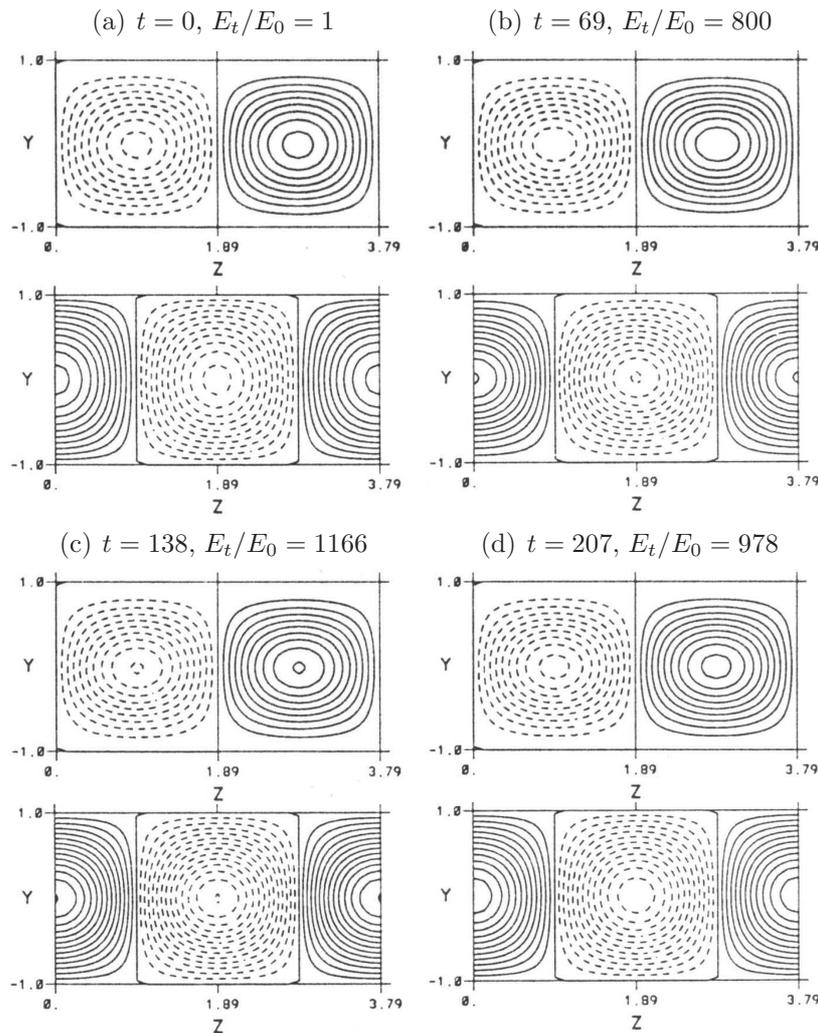


Abbildung 8.17.: Optimale Mode für $k_x = 0$ in der Couette-Strömung bei $Re = 1000$ nach [Butler and Farrell \(1992\)](#). Die optimale Wellenzahl ist $k_z = 1.66$. Die zeitliche Entwicklung entspricht der Abfolge a, b, c und d, wobei das jeweils obere Bild die Stromfunktion (*streamwise vortices*) zeigt und das jeweils untere Bild die Geschwindigkeit u in Stromrichtung (*streaks*). Die maximale Verstärkung wird bei $t = \tau = 138$ erreicht.

Es muß nun das Maximum von $E(t)$ zu gegebener Zeit $t = \tau$ gesucht werden. Dazu wird das Funktional

$$\mathcal{F} = \gamma^* \cdot E_\tau \cdot \gamma + \lambda (\gamma^* \cdot E_0 \cdot \gamma - 1) \quad (8.38)$$

bezüglich der Variation des Wichtungsvektors γ maximiert. Die Nebenbedingung, daß die Anfangsenergie auf 1 normiert ist, wurde über den Lagrangeschen Multiplikator λ berücksichtigt. Die aus $\delta\mathcal{F} = 0$ folgende *Euler-Lagrange-Gleichung* lautet (siehe auch (7.10))

$$E_\tau \cdot \gamma + \lambda E_0 \cdot \gamma = 0. \quad (8.39)$$

Die Gleichung stellt ein verallgemeinertes Eigenwertproblem dar, dessen Eigenwerte λ das Verhältnis der Energie zum Zeitpunkt $t = \tau$ zu der Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ sind. Dies sieht man sofort durch Multiplikation der Euler-Lagrange-Gleichung mit γ^* von links. Die Eigenvektoren stellen die spektrale Wichtung der Normalmoden in der zum Wachstumsfaktor λ gehörenden Anfangsbedingung (Störung) dar. Zur Bestimmung des optimalen Wachstums muß λ nur noch über die Wellenzahlen k_x und k_z sowie über τ maximiert werden.

Für die ebene Couette-Strömung ist in Abb. 8.17 diejenige Mode mit $k_x = 0$ (Einschränkung auf Wirbel in Stromrichtung) gezeigt, die das größte Wachstum aufweist (Butler and Farrell, 1992). In die Energiegleichung (8.37) geht nur der Betrag k des Wellenvektors ein, aber die Eigenwerte σ_j hängen von k_x und k_z ab. Einige numerische Daten sind in Tabelle 8.1 zusammengefaßt. Für die ebene Poiseuille-Strömung muß man zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Moden unterscheiden. Die Mode mit dem größten globalen Wachstum ist antisymmetrisch. Die Wirbel in Stromrichtung sehen so ähnlich aus wie in Abb. 8.17. Entsprechend sind die Streaks antisymmetrisch bzgl. $z = 0$.

8.3. Nichtlineares Verhalten

8.3.1. Experimenteller Befund

In Kap. 8.2 hatten wir gesehen, daß Wirbelstrukturen mit Achse in Stromrichtung für den Übergang zur Turbulenz voraussichtlich wichtig sind, da sie algebraisch sehr stark anwachsen können. Zweidimensionale Störungen wie sie sich aus der Orr-Sommerfeld-Gleichung (6.73) ergeben sind nicht so gefährlich.

Phänomenologie

Trotzdem kann man versuchen, zweidimensionale Moden künstlich anzuregen, um zu sehen, was mit ihnen passiert. Wenn man dies in einer Plattengrenzschicht oder einem Kanal dadurch realisiert, daß man einen quer zur Stromrichtung gespannten Draht mit der passenden Frequenz vertikal oszilliert, bilden sich direkt hinter dem Draht zweidimensionale Tollmien-Schlichting-Wellen (siehe Abb. 6.7). Weiter stromabwärts werden sie über eine dreidimensionale Instabilität in transversaler

8. Übergang zur Turbulenz

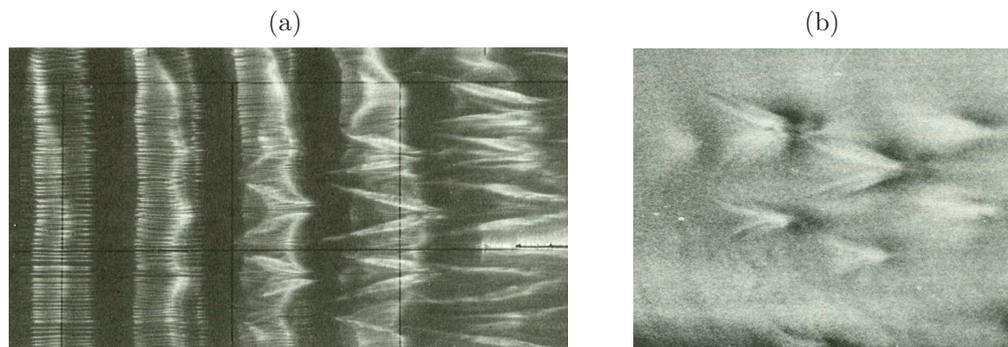


Abbildung 8.18.: H-Typ-Transition in Grenzschichten durch Λ -Wirbel, die in Phase (a) oder versetzt sind (b). Die Strömung ist von links nach rechts. Die hellen periodischen Streichlinien in (a) markieren die Tollmien-Schlichting-Welle, auf der dreidimensionale Störungen in Stromrichtung anwachsen. Aufnahmen: (a) W. S. Saric, (b) J. T. Kegelmann (aus Herbert, 1988).

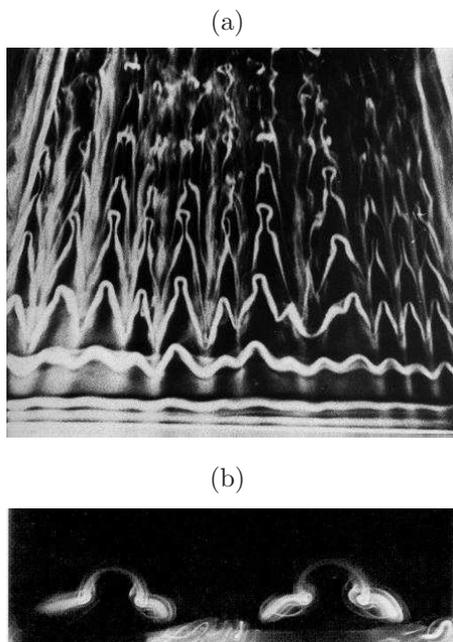


Abbildung 8.19.: (a) Weitere Entwicklung von Λ -Wirbeln in einer Grenzschicht hin zu Haarnadel-Wirbeln (*hairpin vortices*), wobei die Strömung von unten nach oben gerichtet ist. (b) zeigt einen Querschnitt durch ein Paar von Haarnadel-Wirbeln. Alle Aufnahmen stammen von Perry et al. (1981).

Richtung moduliert. Herbert hat gezeigt (siehe Bayly et al., 1988), daß der physikalische Mechanismus dieser Instabilität identisch ist mit dem Mechanismus der *elliptischen Instabilität* (siehe Kap. 4.8). Durch die starke Scherung in der Grundströmung wird das 3D-Muster verstärkt und es entstehen Λ -Wirbel, sogenannte wegen ihrer Form (Abb. 8.18). Sie können in Phase oder versetzt auftreten. Im weiteren Verlauf deformiert die Scherung die Wirbelstrukturen immer stärker und es entstehen sogenannte Haarnadel-Wirbel (Abb. 8.19), bis schließlich der Übergang in die Turbulenz stattfindet. Dieses Szenario wird nach seinem Entdecker (Herbert) *H-Typ-Szenario* genannt.

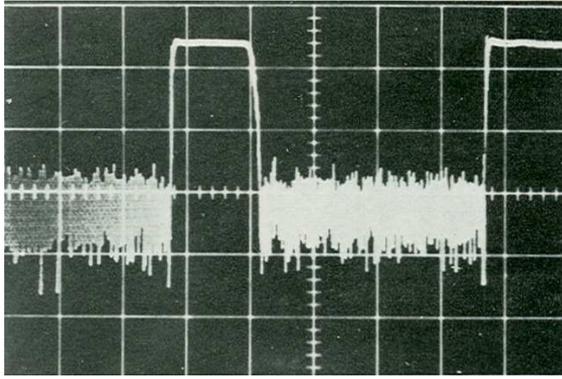
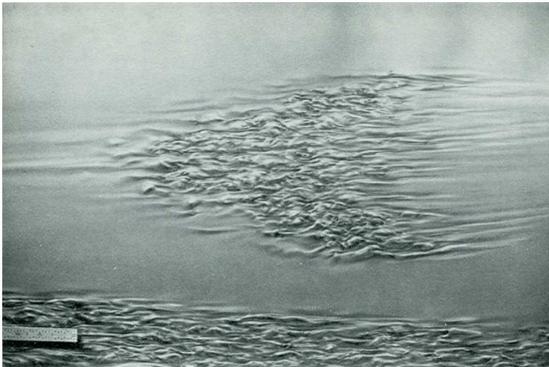


Abbildung 8.20.: Signal eines Hitzdrahts auf der Achse einer intermittierenden Rohrströmung nach Wygnanski and Champagne (1973). Das Signal ist direkt proportional zur Geschwindigkeit. Das intermittierende Verhalten wurde auch schon von Reynolds beobachtet (siehe Abb. 1.9d).

(a)



(b)

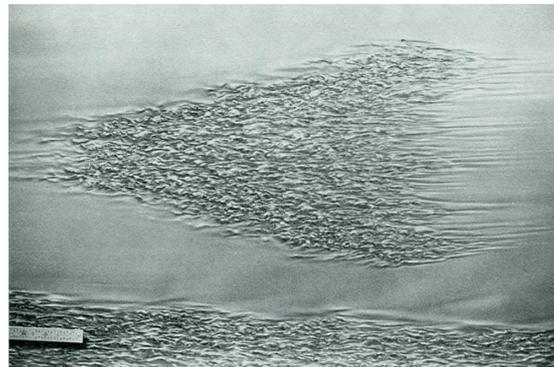


Abbildung 8.21.: Photographie turbulenter Flecken in der Wandgrenzschicht an der Glasplatte der Test-Section eines offenen Wasserkanals. Für die Versuche wurden 15 kg Aluminium-Flitter auf 4500 l Wasser verwendet. Die Aufnahmen wurden durch die Glasplatte gemacht. Die Sichtweite betrug nur 2–3 mm. Bei den gegebenen Bedingungen ($U_\infty = 12$ cm/s für (a) und $U_\infty = 23$ cm/s für (b)) kann man nur die viskose Unterschicht sehen. Die turbulenten Flecken reichen in diese Schicht hinein. Derartige Flecken propagieren stromabwärts mit einem gewissen Bruchteil der Anströmgeschwindigkeit und sie wachsen ungefähr linear mit der Lauflänge an, wobei sie ihre charakteristische Form behalten. Im Zentrum des Fleckens (a) beträgt die Reynoldszahl, basierend auf dem Abstand von der Vorderkante $Re_x \approx 2 \times 10^5$ (nach Cantwell et al., 1978). Die Strömung und auch die Bewegungsrichtung des Spots ist von rechts nach links. Die Streaks vor dem turbulenten Flecken sind gut zu erkennen. Vergleiche auch die Streaks in Abb. 5.6.

Wenn man die Tollmien-Schlichting-Wellen nicht künstlich anregt, gibt es bei entsprechend hoher Reynoldszahl auch einen direkten Übergang in die Turbulenz, der *bypass transition* genannt wird, da hierbei alle eventuell möglichen Zustände zwischen laminarer und turbulenter Strömung übersprungen werden.

In ebenen Scherströmungen treten die begrenzten turbulenten Bereiche in Form von typischen *turbulenten Flecken* auf, die zuerst von Emmons (1951) entdeckt wurden. Sie besitzen eine charakteristische Gestalt (Abb. 8.21 und 8.22).

Im Übergangsbereich zwischen laminarer und voll turbulenter Strömung findet

8. Übergang zur Turbulenz

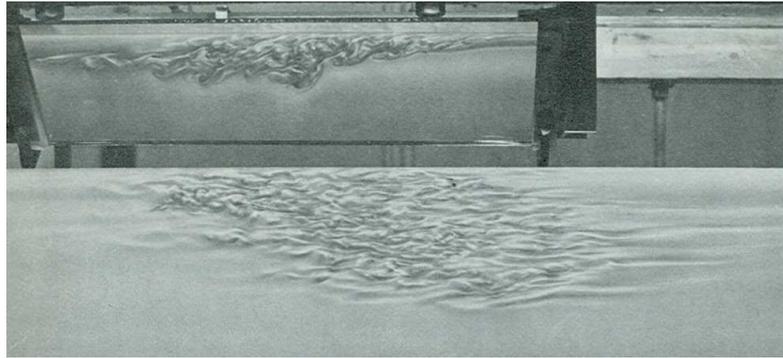


Abbildung 8.22.: Die Aufnahme von [Cantwell et al. \(1978\)](#) zeigt die Signatur eines halb turbulenten Fleckens, der in die viskose Unterschicht reicht, gesehen durch die transparente Glaswand (unten). Die räumliche Struktur senkrecht zur seitlichen Wandplatte und an der freien Oberfläche des Wasserkanals ist im oberen Teil des Bildes gezeigt, und wurde mittels Spiegel eingeblendet.

man Zustände, die durch raum-zeitliche *Intermittenz* charakterisieren sind. In abgeschlossenen Systemen mit einer normalen Rückwärtsbifurkation sind im subkritischen Bereich zwei stabile Lösungen möglich. Man findet dann Hysterese. In weit ausgedehnten Systemen können aber beide Lösungen koexistieren. Dann sind die beiden räumlichen Bereiche durch eine Front voneinander getrennt. Etwas ähnliches findet man auch knapp oberhalb des Einsatzes turbulenter Strömungen in der Rohrströmung (Abb. 8.20), in der ebenen Couette-Strömung oder in Grenzschichtströmungen.

Die Entstehung eines turbulenten Fleckes wurde von [Perry et al. \(1981\)](#) untersucht und ist in Abb. 8.23 skizziert. Die Autoren stellten fest, daß die den turbulenten Flecken zugrunde liegenden Wirbelstrukturen große Ähnlichkeit mit den Λ -Wirbeln haben (siehe Abb. 8.18). Abbildung 8.23a zeigt ein Wirbel-Filament, das durch eine lokale Störung deformiert wird. Im Experiment wurde durch ein kleines Loch in der Wand ein feiner und möglichst schwacher Luftstrahl für ca. 20 ms in die Grenzschichtströmung von Luft injiziert.¹³ Die Störung des Wirbel-Filaments breitet sich erstens entlang seiner Achse, also quer zur Stromrichtung aus. Zweitens induzieren die Störungen ähnliche Störungen auf den benachbarten Wirbelfilamenten stromabwärts (in Teil (a) der Abbildung nicht gezeigt), die phasenverschoben sind. Dadurch entsteht im Laufe der zeitlichen Entwicklung ein gestaffeltes Muster.

Auch im Taylor-Couette-Experiment beobachtet man turbulente Flecken. Beispiele sind in Abb. 8.24 gezeigt.

Lebensdauern turbulenter Flecken

Um die Dynamik der turbulenten Flecken in der Nähe ihrer Existenzschwelle zu untersuchen, haben [Bottin, Daviaud, Manneville and Dauchot \(1998\)](#) die ebene Couette-Strömung (Wasser) lokal gestört, wie schon zuvor [Perry et al. \(1981\)](#),

¹³hk:check!