

7. Energie-Stabilität

Wenn man S in die Euler-Lagrange-Gleichungen (7.18) einsetzt, erhält man in Komponenten (ein Faktor 2 wurde in den Druck hineingezogen)

$$U'v - \frac{2}{\text{Re}} \nabla^2 u = -\partial_x \pi, \quad (7.29a)$$

$$U'u - \frac{2}{\text{Re}} \nabla^2 v = -\partial_y \pi, \quad (7.29b)$$

$$-\frac{2}{\text{Re}} \nabla^2 w = -\partial_z \pi. \quad (7.29c)$$

Sie sind *nicht* identisch mit den linearen Stabilitätsgleichungen (6.62a)–(6.62c). Der niedrigste Eigenwert bestimmt Re_E .

7.2.1. Ebene Couette-Strömung

Als Beispiel sei die ebene Couette-Strömung betrachtet. In dimensionslosen Einheiten ist $U' = 1$ und $U'' = 0$. Da die Euler-Lagrange-Gleichungen (7.17) linear sind, lassen sich die Lösungen als Normalmoden darstellen

$$[u, v, w, \pi]^T(x, y, z) = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\pi}]^T(y) \times e^{i(k_x x + k_z z)} + \text{c.c.} \quad (7.30)$$

Mit $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ und $L = \partial_y^2 - k^2$ lauten die Gleichungen

$$\hat{v} - \frac{2}{\text{Re}} L \hat{u} = -ik_x \hat{\pi}, \quad (7.31a)$$

$$\hat{u} - \frac{2}{\text{Re}} L \hat{v} = -\partial_y \hat{\pi}, \quad (7.31b)$$

$$-\frac{2}{\text{Re}} L \hat{w} = -ik_z \hat{\pi}. \quad (7.31c)$$

Weiter läßt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung

$$ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v} + ik_z \hat{w} = 0 \quad (7.32)$$

$\hat{w} = -(ik_z)^{-1}(ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v})$ eliminieren und wir erhalten

$$\hat{v} - \frac{2}{\text{Re}} L \hat{u} = -ik_x \hat{\pi}, \quad (7.33a)$$

$$\hat{u} - \frac{2}{\text{Re}} L \hat{v} = -\partial_y \hat{\pi}, \quad (7.33b)$$

$$\frac{2}{\text{Re}} L (ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v}) = k_z^2 \hat{\pi}. \quad (7.33c)$$

Die Eliminierung des Drucks $\hat{\pi}$ und der Geschwindigkeitskomponenten \hat{u} und \hat{w} führt schließlich auf eine Gleichung für \hat{v} ⁹

$$k_z^2 \hat{v} + \left(\frac{2}{\text{Re}}\right)^2 L^3 \hat{v} + 2ik_x \left(\frac{2}{\text{Re}}\right) L \partial_y \hat{v} = 0. \quad (7.34)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 6. Ordnung in der transversalen Koordinate y . Die Geschwindigkeitskomponente \hat{v} muß dabei die Randbedingungen $\hat{v} = \partial_y \hat{v} = L^2 \hat{v} = 0$ auf den Rändern $y = \pm 1/2$ erfüllen.

Das Problem (7.34) muß numerisch gelöst werden (Joseph, 1976a). Für $k_x = 0$ vereinfacht es sich aber beträchtlich. In diesem Grenzfall handelt es sich um kinematisch zulässige Wirbelstrukturen, deren Achsen in Stromrichtung ausgerichtet sind (sie ähneln den *streamwise vortices* aus Abb. 5.6). Damit reduziert sich das Problem auf

$$\left(\frac{2}{\text{Re}}\right)^2 L^3 \hat{v} + k_z^2 \hat{v} = 0. \quad (7.35)$$

Diese Gleichung ist formal identisch mit dem **linearen** Stabilitätsproblem für das Rayleigh-Bénard-Problem, wenn man die Rayleighzahl mit $\text{Ra} = \text{Re}^2/4$ identifiziert. Da die kritische lineare Rayleighzahl genau wie das Energie-Limit durch den minimalen Eigenwert gegeben ist, können wir die Beziehung $\text{Ra}_c = \text{Re}_E^2/4$ herstellen. Aus der Kenntnis der kritischen Rayleighzahl¹⁰ $\text{Ra}_c = 1708$ erhalten wir dann sofort das Energie-Limit für die ebene Couette-Strömung¹¹

$$\text{Re}_E = 2\sqrt{\text{Ra}_c} = 2\sqrt{1708} = 82.6. \quad (7.36)$$

Die entsprechende Wellenzahl ist ebenfalls identisch $k_z^E(\text{Couette}) = k_z^c(\text{R.B.P.}) = 3.117$.

⁹Zur Eliminierung des Drucks wird zunächst $k_z^2 \times (7.33a) + ik_x \times (7.33c)$, $\partial_y(7.33c) + k_z^2 \times (7.33b)$, und $ik_x \partial_y \times (7.33a) + k_x^2 \times (7.33b)$ gebildet, wonach man

$$\begin{aligned} k_z^2 \hat{v} - \frac{2}{\text{Re}} L(k^2 \hat{u} - ik_x \partial_y \hat{v}) &= 0, \\ k_z^2 \hat{u} + \frac{2}{\text{Re}} L(ik_x \partial_y \hat{u} + \partial_y^2 \hat{v} - k_z^2 \hat{v}) &= 0, \\ ik_x \partial_y \hat{v} + k_x^2 \hat{u} - \frac{2}{\text{Re}} L(ik_x \partial_y \hat{u} + k_x^2 \hat{v}) &= 0, \end{aligned}$$

erhält. Addition der beiden letzten Gleichungen liefert

$$ik_x \partial_y \hat{v} + k_x^2 \hat{u} + \frac{2}{\text{Re}} L^2 \hat{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = -\frac{1}{k^2} \left(ik_x \partial_y \hat{v} + \frac{2}{\text{Re}} L^2 \hat{v} \right).$$

Wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt, erhält man (7.34). Da auf dem Rand alle Geschwindigkeitskomponenten verschwinden müssen, erhält man aus der Kontinuitätsgleichung (7.32) die Randbedingung $\partial_y \hat{v} = 0$. Zusammen mit der obigen Gleichung folgt aus $\hat{u} = 0$ die weitere Bedingung $L^2 \hat{v} = 0$.

¹⁰Siehe Chandrasekhar (1961) oder Drazin and Reid (1981).

¹¹Wir haben hier die Geschwindigkeit und die Kanalweite so entdimensionalisiert, daß $U' = 1$. Bei Schmid and Henningson (2001) ist $U' = 2$, so daß dann $\text{Re}_E = 1/2\sqrt{\text{Ra}_c} = 20.7$, kompatibel mit den Daten in Tabelle 1.1.

7. Energie-Stabilität

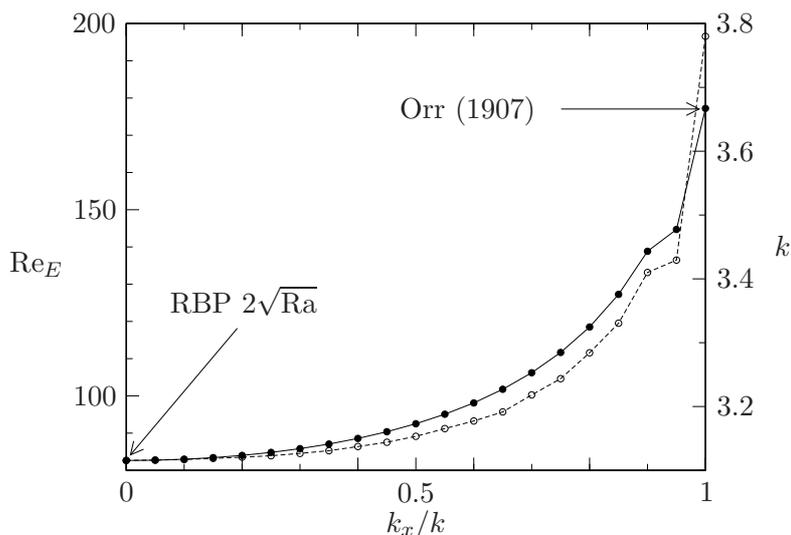


Abbildung 7.1.: Energie-Limit Re_E (—) und Absolutwert der Wellenzahl k (- - -) der am schwächsten gedämpften kinematischen Mode als Funktion der Propagationsrichtung. Für $k_x/k = 0$ oszilliert die kinematische Mode räumlich nur in z -Richtung, für $k_x/k = 1$ nur in x -Richtung (zweidimensionale Lösung). Die numerischen Daten wurden [Joseph \(1976a\)](#) entnommen.

Die numerische Lösung von (7.34) bestätigt, daß $Re_E(k_x)$ bei $k_x = 0$ tatsächlich ein Minimum hat. Damit besitzt die kinematische Mode, die bei $t = 0$ am wenigsten gedämpft ist, den Wellenvektor $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$ und hat ein Nullwachstum bei $Re_E = 82.6$. Dieses Ergebnis steht im markanten Unterschied zur linearen Theorie, die $Re_c \rightarrow \infty$ liefert und $k_z = 0$ (Squire-Theorem). [Orr \(1907\)](#) nahm an, daß $k_z = 0$ ist und fand das Energie-Limit $Re_E(k_z = 0) = 177.2$. Dieser Wert für Re_E ist jedoch zu hoch, da er die falsche Symmetrie vorausgesetzt hatte. Abb. 7.1 zeigt den Verlauf von $Re_E(k_x/k)$.

8. Übergang zur Turbulenz

Die geschlossenen Systeme wie zum Beispiel das Rayleigh-Bénard-System oder das Taylor-Couette-System sind homogen in der Zeit und in zwei Raumrichtungen. Bei diesen Systemen findet man bei Erhöhung der Rayleighzahl bzw. der Taylorzahl eine Sequenz von Instabilitäten, bei denen die Symmetrien in den homogenen Richtungen sukzessive gebrochen werden (Busse, 2003). Diese Sequenz von Instabilitäten führt zu immer komplexeren raum-zeitlichen Strukturen bis zur Turbulenz, die dadurch gekennzeichnet ist, dass das Spektrum breitbandig wird. Auch im turbulenten Bereich findet man in der gemittelten Strömung immer noch Signaturen von Mustern, die auch im laminaren Bereich existieren. Ab einer gewissen Schwelle des Antriebs verschwinden auch diese Korrelationen.

Im Gegensatz dazu hat der Mechanismus der Turbulenzentstehung in Scherschichten vermutlich wenig mit den linearen Instabilitäten und der Musterbildung in den oben genannten geschlossenen Systemen zu tun (Großmann, 1995). Bei der Turbulenz kommt es auf ein Zusammenspiel von Dämpfung, Umverteilung von Energie zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden des Systems und der Produktion von Energie an. Dieses Zusammenspiel ist von wesentlicher Bedeutung für die Turbulenzentstehung in ebene Scherströmungen. Erst in letzter Zeit wurden wesentliche Fortschritte bei dem Verständnis des Zusammenwirkens dieser Prozesse erzielt (siehe z.B. Grossmann, 2000; Eckhardt et al., 2007).

8.1. Szenarien

Bei den nichtlinearen dynamischen Systemen, betrachtet man die Zeitabhängigkeit der Lösung. Häufig findet man bei Erhöhung der Antriebsstärke einen Übergang zu einem chaotischen Verhalten (Eckmann, 1981; Schuster, 2005). Für den Weg ins Chaos sind drei *generische Szenarien* (typische Wege) seit einiger Zeit bekannt. Sie wurden auch beim Einsatz der Turbulenz in geschlossenen Systemen gefunden.

8.1.1. Feigenbaum-Szenario

Beim *Feigenbaum-Szenario* (Feigenbaum, 1980) tritt nach dem Einsatz von einfachen Oszillationen mit Periode $T = \omega/2\pi$ nach Erhöhung der Antriebsstärke eine Periodenverdopplung auf, so daß die Periode dann $2T$ ist. Bei weiterer Erhöhung des Kontrollparameters Re finden sukzessive weitere Periodenverdopplungen zu Periode $4T$, $8T$, etc. auf. Dabei schrumpft der Abstand $r_{2n} = Re_{2n} - Re_n$ der kritischen Reynoldszahlen Re_n , bei denen sich die Periode verdoppelt, asymptotisch (also im

8. Übergang zur Turbulenz

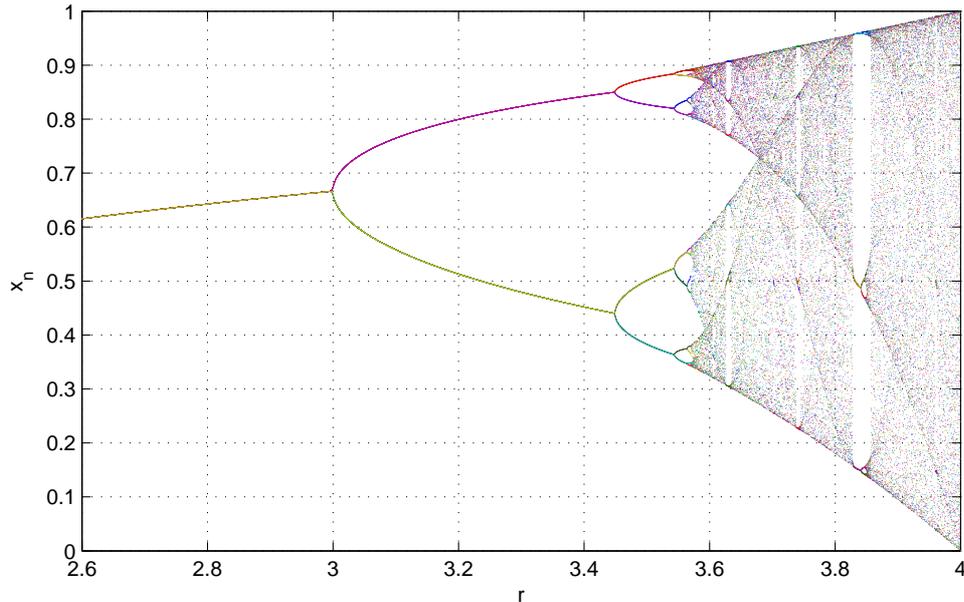


Abbildung 8.1.: Iterierte logistische Abbildung. Dargestellt sind die Werte x_{N+1}, \dots, x_{N+M} für $N = 1000$ und $M = 20$ als Funktion des Kontrollparameters. Der Anfangswert ist $x_0 = 0.5$ für alle r .

Limes $n \rightarrow \infty$) um den Faktor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{2n}}{r_n} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{4.6692201660910}. \quad (8.1)$$

Die Konstante δ heißt *Feigenbaum-Konstante* (Grossmann and Thomae, 1977). Sie ist universell. Die geometrische Reihe $\sum_n \delta^{-n}$ konvergiert rasch auf einen endlichen Wert, bei dem das Chaos (die Turbulenz) einsetzt. In der Strömungsmechanik wurde dieses Verhalten von Libchaber and Maurer (1978) beim Rayleigh-Bénard-System beobachtet.

Eines der einfachsten Modellsysteme, anhand dessen man die Feigenbaum-Sequenz beobachten kann ist das diskrete nichtlineare dynamische System, welches durch die folgende Iterationsvorschrift gegeben ist

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (8.2)$$

Diese Iteration ist eine Abbildung $x_n \rightarrow x_{n+1}$. Man nennt sie die *logistische Abbildung* (*logistic map*). Hierbei ist r der Kontrollparameter. Die zeitliche Entwicklung ist hier diskret, d.h. durch die Sequenz x_0, x_1, x_2, \dots gegeben. Wenn man nun von einem beliebigen Anfangswert x_0 ausgeht, bis zu $n = N$ iteriert und dann die folgenden M Iterierten x_{N+1}, \dots, x_{N+M} als Funktion von r aufträgt, erhält man das Verzweigungsdiagramm in Abb. 8.1. Abbildung 8.2 zeigt die geometrische Interpretation der logistischen Abbildung und deren Grenzzyklen.

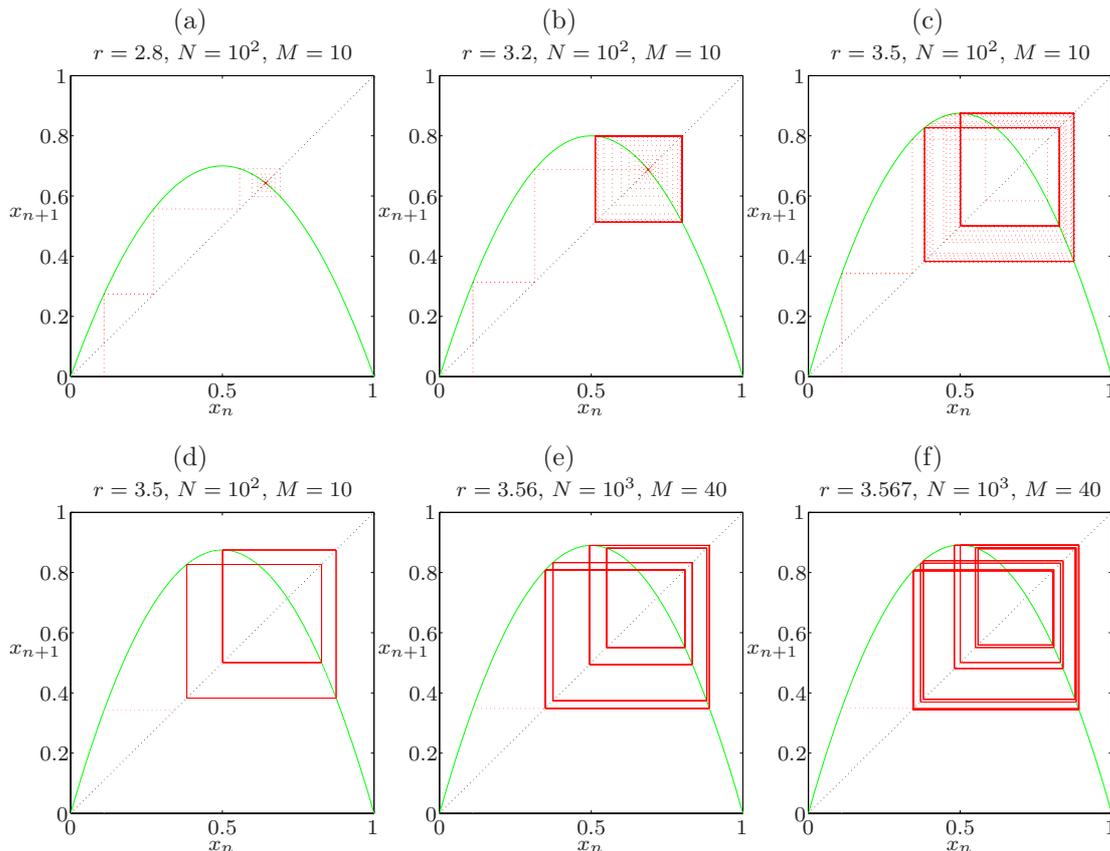


Abbildung 8.2.: Graphische Darstellung der logistischen Abbildung durch den Graphen von $x_{n+1}(x_n) = rx_n(1-x_n)$ in grün. Die *transiente* Iteration des Anfangswerts $x_0 = 0.11$ für $n = 1, \dots, N$ ist rot punktiert dargestellt. Die Iteration für $n = N + 1, \dots, N + M$ ist in rot durchgezogen dargestellt. In (d)–(f) ist das transiente Verhalten unterdrückt.

8.1.2. Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario

Das *Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario* beschreibt einen Weg ins Chaos über inkommensurable Frequenzen. Zwei Frequenzen ω_1 und ω_2 sind *inkommensurabel*, wenn sich ihr Verhältnis $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ nicht als rationale Zahl darstellen läßt. Das zugehörige Signal ist dann nicht periodisch, sondern nur quasi-periodisch. Schon Landau (1944) hatte als möglichen Weg in die Turbulenz einen Prozeß vorgeschlagen, bei dem sukzessive unendlich viele inkommensurable Frequenzen auftreten. Die ersten Schritte des Landau-Szenarios wurden zwar beobachtet, das Chaos setzt aber oft schon nach zwei inkommensurablen Frequenzen ein. Die vollständige Landau-Sequenz wird also nicht beobachtet. Ein Beispiel ist in Abb. 8.3 gezeigt. Gelegentlich treten auch 3 oder 4 inkommensurable Frequenzen auf. Ein System mit 5 inkommensurablen Frequenzen scheint instabil zu sein (Drazin, 2002). Da sich die Frequenzen bei Erhöhung des Antriebs verändern, kann der Fall auftreten, daß die Frequenzen bei einem bestimmten Kontrollparameter wieder kommensurabel werden. Dann findet

8. Übergang zur Turbulenz

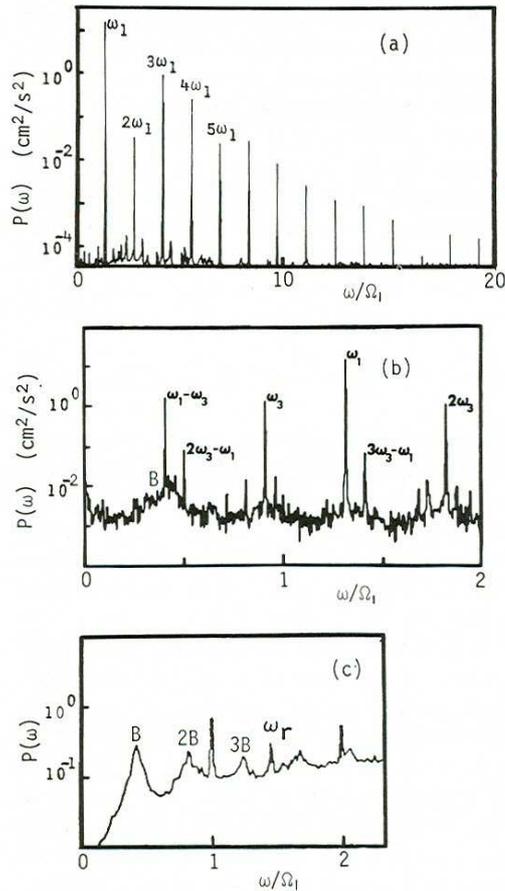


Abbildung 8.3.: Leistungsspektrum für zeitabhängige Taylor-Wirbel in Abhängigkeit von der Reynoldszahl $\text{Re} = \Omega_1 R_1 (R_2 - R_1) / \nu$ nach Di Prima and Swinney (1985). Für $\text{Re}/\text{Re}_c = 5.6$ (a) hat man eine periodische Strömung mit schön entwickelten Harmonischen. Für $\text{Re}/\text{Re}_c = 15.1$ hat man zwei inkommensurable Frequenzen ω_1 und ω_3 (b). Für diese Parameter ist die Strömung schon schwach turbulent, was man an den schwachen breitbandigen Teil des Spektrums erkennen kann. Für $\text{Re}/\text{Re}_c = 28$ ist die Strömung voll turbulent. Die Peaks bei $\omega/\Omega_1 = 1$ und 2 stellen den Fingerabdruck der Apparatur dar.

sich wieder eine periodische Lösung, die bei weiterer Erhöhung des Antriebs wieder quasiperiodisch wird. Dieses Spiel kann sich mehrfach wiederholen bis schließlich Chaos einsetzt und das Spektrum breitbandig wird.

8.1.3. Intermittenz

Beim Übergang zum Chaos durch *Intermittenz* wird eine zeitperiodische Lösung über eine superkritische Verzweigung instabil (Pomeau and Manneville, 1980). Knapp oberhalb der Schwelle wird für lange Zeiten der instabile Zustand näherungsweise realisiert, wobei diese fast periodische Strömung in unregelmäßigen aber langen Zeitabständen durch kurzzeitige turbulente Ausbrüche unterbrochen wird. Bei Erhöhung des Antriebs werden die Zeitabstände zwischen den Ausbrüchen kürzer, die Stärke der Ausbrüche ändert sich jedoch nur wenig. Man findet, daß die Zeitabstände $\Delta\tau$ zwischen den turbulenten Ausbrüchen für $\text{Re} \downarrow \text{Re}_c$ wie $\Delta\tau \sim (\text{Re} - \text{Re}_c)^{-1/2}$ skalieren.

Ein Modell-Beispiel ist die von Pomeau and Manneville (1980) vorgeschlagene *iterierte Abbildung*

$$x_i \rightarrow x_{i+1} = 2x_i + r \sin(2\pi x_i) - \epsilon \sin(4\pi x_i), \quad \text{modulo } 1. \quad (8.3)$$

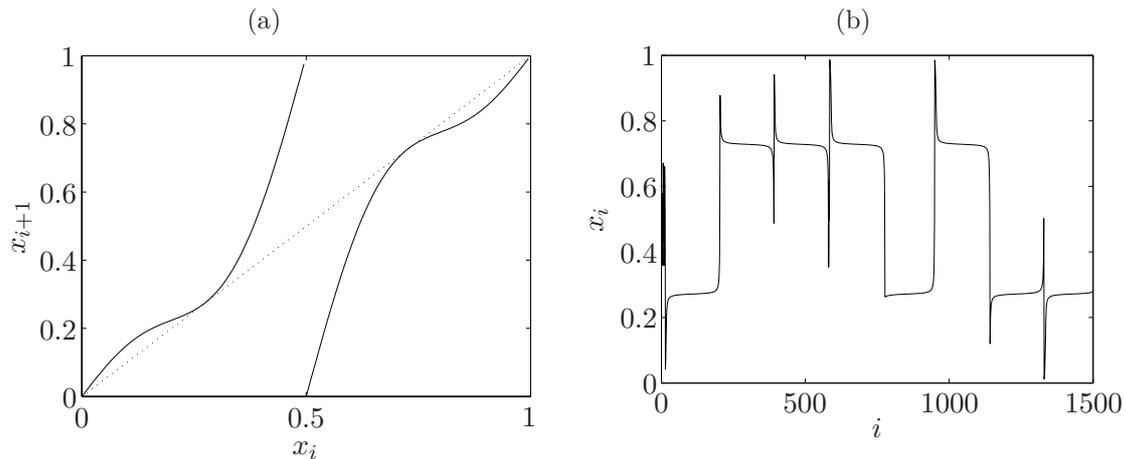


Abbildung 8.4.: (a) Graph der iterierten Abbildung (8.3) und (b) Dynamik der Iterierten x_i für $r = -0.24706$ und $\epsilon = 0.09985$ mit Anfangswert $x(1) = 0.35$. Man erkennt die weiten Gebiete laminaren Verhaltens (keine große Änderung), die durch kurze *turbulente* Ausbrüche unterbrochen werden.

Abbildung 8.4 zeigt die Abbildung und die Dynamik für $r \approx r_T = -0.24706$ und $\epsilon = 0.09985$. Die langen Transienten kommen dadurch zustande, daß die der Graph der Abbildung $x_{i+1}(x_i)$ nahezu tangential ist zur Diagonalen $x_{i+1} = x_i$ auf welcher die Fixpunkte liegen. In diesem Fall hält sich die Abbildung sehr lange in dem schmalen Kanal zwischen den beiden Graphen auf und kommt nicht richtig vom Fleck.

Ein konkretes strömungsmechanisches Beispiel ist in Abb. 8.5 gezeigt. Es handelt sich um die Strömung in einem Rechteckbehälter mit Höhen-zu-Breiten-Verhältnis in der (x, y) -Ebene von $\Gamma = 0.9$, dessen zwei gegenüberliegende Wände antiparallel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt werden. Es wurde eine in Spann-Richtung unendlich ausgedehnte Konfiguration betrachtet, in der die Strömung periodisch in z ist. Die Spann-Komponente der Geschwindigkeit w zeigt hier ein intermittierendes Verhalten. Ähnliche Intermittenz findet man auch im einseitig per bewegter wand angetriebenen Kubus (Kuhlmann, 1995; Lopez et al., 2017) bzw. in einem Kubus, in dem die Strömung durch eine konstante Schubspannung auf einer Seitenfläche angetrieben wird (des Bosc).

8.1.4. Turbulenzübergang in Scherschichten

Keines der oben genannten Szenarien für den Übergang zu einem chaotischen Verhalten trifft für den Einsatz der Turbulenz bei ebenen Scherströmungen, z. B. der ebenen Couette-Strömung oder der ebenen Poiseuille-Strömung, zu. Bei Scherschichten wird ein schlagartiger Übergang in die Turbulenz beobachtet, wobei die experimentell gemessene Schwelle (kritische Reynoldszahl) in einem gewissen Wertebereich streut und davon abhängt, welche Amplitude die Störungen der idealen Strömung besitzen. Es gibt also eine zweifache Schwelle: Bezüglich der Reynoldszahl

8. Übergang zur Turbulenz

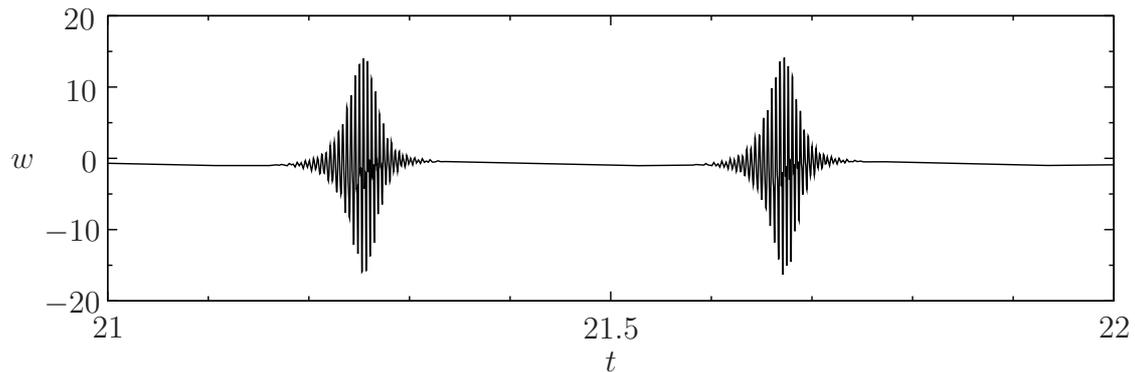


Abbildung 8.5.: Intermittierendes Verhalten der dreidimensionalen Strömung in einem zweiseitig antiparallel angetriebenen Rechteckbehälter mit Höhen-zu-Breiten-Verhältnis $\Gamma = 0.9$ bei $Re = 660$. Gezeigt ist die Geschwindigkeitskomponente w in Spannweitenrichtung als Funktion der Zeit (Albensoeder, 2004).

und bezüglich der Amplitude der Störungen.

Die wichtigsten Charakteristika des Turbulenzübergangs sind:

1. Der Einsatz der Turbulenz ist schlagartig, instationär und involviert viele Längen- und Zeitskalen (es sind viele Freiheitsgrade beteiligt).
2. Es sind Störungen endlicher Amplitude erforderlich (abhängig von Re).
3. Der Übergang hat keine scharfe *kritische* Reynoldszahl wie bei linearen Instabilitäten. Die Reynoldszahl, bei welcher der Umschlag erfolgt, hängt von der Art und der Amplitude der Störungen ab.¹

Bei der Analyse des Stabilitätsverlusts eines laminaren Strömungszustands geht man traditionell folgendermaßen vor:

1. Man linearisiert die Navier-Stokes-Gleichungen bezüglich kleiner Störungen des laminaren Grundzustands und erhält ein dynamisches System für das Schicksal kleiner Störungen \mathbf{u} der Form

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -i\mathcal{L} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (8.4)$$

2. Man berechnet die Eigenfunktionen und die Eigenwerte des Systems (von $-i\mathcal{L}$).

Falls ein Eigenwert mit positivem Realteil existiert, ist die Grundströmung instabil. Die zu dem Eigenwert gehörige Mode wächst dann anfänglich exponentiell an, bis nichtlineare Terme eine Sättigung bewirken. Da für ebene Scherströmungen das

¹Bei sorgfältiger Präparation konnte die Hagen-Poiseuille-Strömung bis zu $Re = 10^5$ laminar gehalten werden (Wynanski and Champagne, 1973).

Squire-Theorem gilt, konzentrierte man sich in der Vergangenheit auf die Eigenmoden der zweidimensionalen Orr-Sommerfeld-Gleichung. Die Analyse von Eigenwerte liefert aber bei parallelen Scherströmungen viel zu hohe bzw. gar keine Stabilitätsgrenze.

Andererseits sind die in Kap. 7.2 erzielten Energie-Limits Re_E sehr niedrig. Insbesondere sind sie viel kleiner als die Reynoldszahlen, bei denen man den Übergang zur Turbulenz beobachtet. Dies hat damit zu tun, daß das Energie-Limit ein monoton abklingendes aller Störungen voraussetzt (monotone Stabilität für $Re < Re_E$), was in manchen Fällen sehr restriktiv ist.

Diese Beobachtungen kann man miteinander in Einklang bringen, wenn man beachtet, daß eine Analyse der Eigenwerte allein nur dann berechtigt ist, wenn die Eigenfunktionen des betrachteten Systems *orthogonal* sind. Falls die Eigenvektoren nicht orthogonal sind, kann im Rahmen der linearen Näherung die Amplitude bestimmter Störungen für eine gewissen Zeit beträchtlich anwachsen, obwohl alle Eigenvektoren exponentiell zerfallen. Es ist gerade der Bereich $Re_E < Re < Re_G$ (siehe Abb. 1.13), in dem Störungen transient anwachsen können. Diese Störungen werden aber bei der Energie-Stabilitätsanalyse nicht berücksichtigt.

Da der Verstärkungsfaktor während der transienten Phase für bestimmte Störungen sehr groß sein kann, ist es möglich, daß anfänglich kleine Störungen nichtlineare Prozesse auslösen, die dann in der Turbulenz münden. Diese Prozesse sollen im folgenden etwas näher untersucht werden. Dabei beschäftigen wir uns zuerst mit dem transienten Wachstum.

8.2. Transientes Wachstum

8.2.1. Normale und nicht-normale Operatoren

Wenn alle Eigenwerte (komplexe Wachstumsraten) des linearen Stabilitätsproblems einen negativen Realteil besitzen *und wenn die Eigenvektoren orthogonal sind*, dann klingen alle Störungen monoton ab, da man jede Störung als Superposition der *orthogonalen Eigenvektoren* darstellen kann. Mathematisch bedeutet dies, daß der lineare Operator \mathcal{L} *normal* ist. Ein linearer Operator \mathcal{L} ist dann und nur dann normal, wenn er mit seinem adjungierten Operator² \mathcal{L}^\dagger vertauscht

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \cdot \mathcal{L}. \quad (8.5)$$

²Der zu \mathcal{L} adjungierte Operator \mathcal{L}^\dagger ist definiert über

$$\langle \mathbf{x}, \mathcal{L}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathcal{L}^\dagger \mathbf{x} \rangle^*,$$

wobei $\langle f, g \rangle = \int f^* g \, dV$ ein Skalarprodukt für komplexe Funktionen ist. Wenn $\mathcal{L} = A$ eine Matrix ist, dann ist die zu A adjungierte Matrix $A^\dagger = (A^T)^*$. Die Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$) sind reell.

8. Übergang zur Turbulenz

Andernfalls ist \mathcal{L} *nicht-normal*.³ Gerade dies ist aber der Fall bei parallelen Scherströmungen. Falls \mathcal{L} eine Matrix-Darstellung hat, dann ist \mathcal{L}^\dagger die transponierte und konjugiert komplexe Matrix.

Selbstadjungierte Operatoren $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ sind immer normal. Sie besitzen reelle Eigenwerte. Dies bedeutet, daß die zugehörige Instabilität stationär einsetzt. Dies ist der Fall beim Rayleigh-Bénard-Problem: Der Operator des lineare Stabilitätsproblems des Wärmeleitungszustands ist selbstadjungiert und damit normal. Als Folge führt die Instabilität zu stationären Konvektionsrollen. Auch der lineare Operator der Stabilität der zirkularen Couette-Strömung bei Rotation des Innenzylinders und im Limes verschwindender Spaltbreite ist selbstadjungiert. Die Taylor-Wirbel sind stationär (siehe Kap. 1.1).

Wenn der lineare Operator nicht selbstadjungiert ist, können auch komplexe Eigenwerte auftreten. Dann ist der lineare Operator im allgemeinen nicht-normal. Als Beispiel zeigt Abb. 8.6 den Grad der Nicht-Normalität der Eigenvektoren des linearen Stabilitätsproblems der zylindrischen Couette-Strömung bei Rotation des Außenzylinders. Als Graustufen dargestellt sind die Beträge der Skalarprodukte $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle$ zwischen verschiedenen normierten Eigenvektoren $|\mathbf{v}_i\rangle$. Wären alle Eigenvektoren orthogonal, wäre nur die Diagonale in der Abbildung besetzt. Dies ist hier aber nicht der Fall. Die Auswirkung der Nicht-Normalität des linearen Operators für die zeitliche Entwicklung von Anfangsstörungen soll an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden.

8.2.2. Ein einfaches Beispiel

Wenn ein linearer Operator nicht-normal ist, dann sind die Eigenvektoren nicht mehr linear unabhängig von einander. Die Auswirkungen dieses Sachverhalts auf das

³Seien $|\psi_n\rangle$ Eigenvektoren von \mathcal{L} mit Eigenwerten λ_n , also $|\mathcal{L}\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle$. Dann ist

$$\langle \psi_m | \mathcal{L}^\dagger \mathcal{L} - \mathcal{L} \mathcal{L}^\dagger | \psi_n \rangle = \langle \mathcal{L}\psi_m | \mathcal{L}\psi_n \rangle - \langle \mathcal{L}^\dagger \psi_m | \mathcal{L}^\dagger \psi_n \rangle = \lambda_m^* \lambda_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle - \langle \mathcal{L}^\dagger \psi_m | \mathcal{L}^\dagger \psi_n \rangle.$$

Die Eigenwerte des adjungierten Operators kennen wir nicht. Wenn nun die Eigenvektoren orthogonal sind und ein vollständiges Funktionensystem bilden, dann kann man die Identität $\sum_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$ einfügen (dies entspricht der Projektion auf die orthogonalen Eigenvektoren und Multiplikation mit denselben) und wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | \mathcal{L}^\dagger \mathcal{L} - \mathcal{L} \mathcal{L}^\dagger | \psi_n \rangle &= \lambda_n^* \lambda_n \delta_{nm} - \sum_k \langle \mathcal{L}^\dagger \psi_m | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \mathcal{L}^\dagger \psi_n \rangle \\ &= \lambda_n^* \lambda_n \delta_{nm} - \sum_k \langle \psi_m | \mathcal{L}\psi_k \rangle \langle \mathcal{L}\psi_k | \psi_n \rangle = \lambda_n^* \lambda_n \delta_{nm} - \sum_k \lambda_k^* \lambda_k \langle \psi_m | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \psi_n \rangle \\ &= \lambda_n^* \lambda_n \delta_{nm} - \sum_k \lambda_k^* \lambda_k \delta_{mk} \delta_{kn} = \lambda_n^* \lambda_n \delta_{nm} - \lambda_n^* \lambda_n \delta_{nm} = 0. \end{aligned}$$

Es vertauschen als \mathcal{L} und \mathcal{L}^\dagger . Falls die Eigenvektoren $|\psi_n\rangle$ nicht orthogonal sind, kann man die Identität nicht wie oben einfügen, sondern müßte nach einem anderen orthogonalen Funktionensystem entwickeln, um die adjungierten Operatoren zu eliminieren bzw. durch die Eigenwerte von $|\psi_n\rangle$ auszudrücken. In diesem Fall werden sich aber o.B.d.A die resultierenden Summen nicht kompensieren, so daß \mathcal{L} und \mathcal{L}^\dagger nicht vertauschen.