7. Energie-Stabilität

Die Inhalte dieses Kapitels basieren auf den Arbeiten von Joseph (1976*a*) und Straughan (1992). Das Buch von Joseph (1976*a*) ist wesentlich ergiebiger und behandelt sehr viele grundlegende Probleme sowie einige Aspekte der nichtlinearen Stabilität, d.h. der Theorie schwach nichtlinearer Strömungen. Aus Straughan (1992) stammt im wesentlichen die Ableitung der Euler-Lagrange-Gleichungen des Variationsproblems.

Vorab seien zwei fundamentale Ergebnisse genannt. Wegen ihrer Allgemeinheit sind sie jedoch auch sehr restriktiv. Leray (1933) hat gezeigt, daß für alle Werte der Reynoldszahl eine Grundlösung des Anfangswertproblems der Navier-Stokes-Gleichung existiert, welche die Symmetrie des Problems wiederspiegelt (insbesondere die Stationarität bei stationären Randbedingungen). Für $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_G$ (globales Stabilitätslimit, siehe Abb. 1.13) gibt es nur genau eine Grundlösung. Daher ist jede Strömung bei hinreichend kleiner Reynoldszahl eindeutig. Serrin (1959) konnte zeigen, daß diese Grundströmung in einem beliebigen endlichen Gebiet immer stabil ist, solange $\mathrm{Re} < \pi\sqrt{3} \approx 5.44$, wobei $\mathrm{Re} = UL/\nu$, L der maximale Durchmesser des Volumens und U eine obere Schranke für die Geschwindigkeit der Grundströmung ist (siehe auch Acheson, 1990).

7.1. Theorie der Energie-Stabilität

Um den Bereich der Reynoldszahlen abzuschätzen, in dem eine gegebene Grundströmung stabil gegenüber *allen* Störungen ist, gehen wir von der Definition (3.36) der Stabilität aus, die mit Hilfe der kinetischen Energie formuliert wurde. Die zeitliche Entwicklung der mittleren Energie einer beliebigen Störung $\boldsymbol{u}$ der Grundströmung $\boldsymbol{U}$ ist durch die Reynolds-Orr-Gleichung (ohne äußeres Kraftfeld, siehe (3.44))

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-\langle u_i S_{ij} u_j \rangle}_{\text{Produktion } \mathcal{I}} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \underbrace{\left\langle (\partial_j u_i)^2 \right\rangle}_{\text{Dissipation } \mathcal{D}} \tag{7.1}$$

gegeben, wobei $\langle ... \rangle = V^{-1} \int_V ... \mathrm{d}V$ und $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i)$ der Dehnratentensor ist.[1] Im folgenden werden wir annehmen, daß das Volumen zeitunabhängig ist.[2]

[1] Der antisymmetrische Teil von $\partial_j U_i$ beschreibt den rotatorischen Anteil der Strömung und trägt nicht zur Energieänderung bei.

[2] Wegen der Inkompressibilität ändert sich das Gesamtvolumen nicht. Falls sich jedoch die Form des Gesamtvolumens mit der Zeit ändert ist die Situation komplizierter. Dann muß das Reynoldsche Transport-Theorem verwendet werden; siehe z. B. Aris (1989) oder Anhang A.2.

Es ist beachtlich, daß die Reynolds-Orr-Gleichung nur quadratisch in u ist. Der nichtlineare Term der Navier-Stokes-Gleichung würde ja formal mit u^3 eingehen. Bei der Mittelung verschwindet er jedoch: Der nichtlineare Term ist bei der Integration über das Volumen energieerhaltend (siehe (3.44))![3] Aus diesem Grund ist es mathematisch vorteilhaft, die kinetische Energie als ein Maß für die Stärke der Störung zu betrachten und nicht irgendein anderes Maß.

Der erste Term in (7.1) beschreibt die Produktion der Energie des Störgeschwindigkeitsfelds $\boldsymbol{u}$ durch Wechselwirkung mit der Grundströmung $\boldsymbol{U}$. Der zweite Term ist die dimensionslose mittlere Dissipation.[4]

7.1.1. Existenz eines Energie-Limits

Zunächst wollen wir die Existenz einer kritischen Reynoldszahl Re_E zeigen, so daß für $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_E$ die Grundströmung global monoton stabil ist (siehe Abb. 1.13). Die Idee ist nun, die Änderungsrate der mittleren kinetischen Energie nach oben abzuschätzen. Dazu betrachten wir

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{I} - \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{Re}} = -\mathcal{D}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}\right) \leq -\underbrace{\mathcal{D}}_{>0}\Bigg[\frac{1}{\mathrm{Re}} - \underbrace{\max\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}\right)}_{:=\mathrm{Re}_E^{-1}}\Bigg]. \tag{7.2}$$

Für $\mathrm{Re} \leq \mathrm{Re}_E$ wird damit $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$ höchstens gleich Null (nämlich bei $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_E$). Daraus folgt die Rate der Energieänderung für den Fall, daß $\mathrm{Re} \leq \mathrm{Re}_E$ ist,

$$\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} \leq -\underbrace{\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E}}}_{>0}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\right) \leq -2\Lambda\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\right), \tag{7.3}$$

wobei $2\Lambda := \min(\mathcal{D}/\mathcal{E})$. Sowohl $\mathcal{D}$ wie auch $\mathcal{E}$ sind positive Größen. Daher gilt

$$\boxed{\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)\exp\left[-2\Lambda\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\right)t\right] \qquad \text{für} \quad t \geq 0.} \tag{7.4}$$

Dieses Ergebnis besagt, daß alle Störungen mit $\mathcal{E}(0) < \infty$ exponentiell zerfallen, wenn $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_E$ ist. Die Werte Λ und Re_E hängen von $\boldsymbol{u}$ ab und müssen abgeschätzt werden. Die Störungen $\boldsymbol{u}$ sind aber nicht beliebig. Insbesondere müssen bei der Abschätzung von Λ und Re_E zumindest die Randbedingung und die Inkompressibilitätsbedingung

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{(auf dem Rand)} \qquad \text{und} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{(im Volumen)} \tag{7.5}$$

[3] Dies gilt jedoch nicht lokal. Für nicht-Newtonsche Fluide verschwindet die Nichtlinearität auch im Mittel nicht.

[4] Die lokale dimensionsbehaftete Dissipationsrate ist $\rho\nu(\partial_i u_j)^2 = \rho\nu(\partial_i u_j)(\partial_i u_j)$. Sie ist immer positiv.

beachtet werden. Störungen $\boldsymbol{u}$, die diese Bedingungen (aber nicht notwendigerweise die Navier-Stokes-Gleichung, denn dazu müßten wir ja die exakte Lösung kennen) erfüllen, heißen *kinematisch zulässige Störungen*. Die tatsächlichen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen sind immer Untermengen der kinematisch zugelassenen Funktionen. Die Konstante Λ kann man durch Maximierung berechnen (siehe Anhang A.3 oder Joseph, 1976*a*)[5]

$$\Lambda = \min_H \left(\frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{E}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \Lambda^{-1} = \left[\min_H \left(\frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{E}}\right)\right]^{-1} = \max_H \left(\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{D}}\right), \tag{7.6}$$

wobei H der Raum der kinematisch zugelassenen Funktionen ist.

Im folgenden sind wir vor allem an dem sogenannten Energie-Limit Re_E interessiert

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{Re}_E} = \max_H \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}\right),} \tag{7.7}$$

welches man ebenfalls durch Maximierung eines Funktionals erhält.

7.1.2. Rechnen mit Funktionalen

Zur Berechnung des Energie-Limits stellt sich das Problem, das Maximum des **Funktionals** $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{u})/\mathcal{D}(\boldsymbol{u})$ bei Variation der Funktion $\boldsymbol{u}$ zu finden, wobei $\boldsymbol{u}$ aus dem Raum H der kinematisch zulässigen Funktionen sein muß. Insbesondere muß gelten $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$. In Analogie zum Maximum einer einfachen Funktionen müssen wir für das Maximum eines Funktionals fordern, daß die erste Variation des Funktionals verschwindet. In unserem Fall handelt es sich also um ein Variationsproblem unter Nebenbedingungen: Löse

$$\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) = 0, \qquad \text{mit} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{7.8}$$

und homogenen Randbedingungen $\boldsymbol{u} = 0$. Das Symbol δ bezeichnet hier die **1. Variation**. Für die Variationsrechnung gelten ähnliche Regeln wie für die Differentialrechnung, die hier nur kurz ohne Beweis angeführt werden:

$$\delta\left[a\mathcal{F}(\boldsymbol{u})\right] = a\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}), \tag{7.9a}$$

$$\delta\left[\mathcal{F}(\boldsymbol{u})\mathcal{G}(\boldsymbol{u})\right] = \mathcal{F}(\boldsymbol{u})\delta\mathcal{G}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{u})\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}), \tag{7.9b}$$

$$\delta\left[\frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{u})}{\mathcal{G}(\boldsymbol{u})}\right] = \frac{(\delta\mathcal{F})\mathcal{G} - \mathcal{F}(\delta\mathcal{G})}{\mathcal{G}^2}, \tag{7.9c}$$

$$\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u}. \tag{7.9d}$$

Die formale Ableitung $\mathrm{d}\mathcal{F}/\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ des skalaren Funktionals $\mathcal{F}$ nach der (vektoriellen) Funktion $\boldsymbol{u}$ wird Funktionalableitung genannt. Für die Berechnung der Variation

[5] Hierbei ist definiert $\left\langle|\nabla\boldsymbol{u}|^2\right\rangle := \langle(\partial_i u_j)(\partial_i u_j)\rangle$.

kann man auch die Parameterdarstellung

$$\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\eta})\right] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\eta})\right]_{\epsilon=0} \tag{7.10}$$

verwenden.[6] Die erste Variation eine Funktionals $\mathcal{F}(\boldsymbol{u})$ gibt an, wie sich das Funktional ändert, wenn sich $\boldsymbol{u}$ ändert. Die Änderung von $\mathcal{F}$ hängt natürlich von der Art der Änderung von $\boldsymbol{u}$ ab, wobei $\boldsymbol{\eta} \in H$.

7.1.3. Euler-Lagrange-Gleichungen des Energie-Stabilitätsproblems

Im vorliegenden Fall müssen wir das Variationsproblem

$$\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) = \delta\left(\frac{\mathcal{I}(\boldsymbol{u})}{\mathcal{D}(\boldsymbol{u})}\right) = 0 \tag{7.11}$$

lösen. Nach der Quotientenregel (7.9c) folgt

$$\frac{(\delta\mathcal{I})\mathcal{D} - \mathcal{I}(\delta\mathcal{D})}{\mathcal{D}^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta\mathcal{I} - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}\delta\mathcal{D} = 0, \tag{7.12}$$

und damit

$$\delta\mathcal{I} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\delta\mathcal{D} = 0, \tag{7.13}$$

da am Extremum ja gilt $\mathcal{I}/\mathcal{D} = \mathrm{Re}_E^{-1}$. Nun müssen $\delta\mathcal{I}$ und $\delta\mathcal{D}$ berechnet werden

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{I} &= -\delta\left\langle \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{S}\cdot\boldsymbol{u}\right\rangle \\
&\overset{(7.10)}{=} -\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\eta})\cdot\mathrm{S}\cdot(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\eta})\right\rangle_{\epsilon=0} \\
&= -\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{S}\cdot\boldsymbol{u} + 2\epsilon\boldsymbol{u}\cdot\underbrace{\mathrm{S}}_{\text{symm.}}\cdot\boldsymbol{\eta} + \epsilon^2\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{S}\cdot\boldsymbol{\eta}\right)\right\rangle_{\epsilon=0} \\
&= -2\left\langle \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{S}\cdot\boldsymbol{\eta}\right\rangle
\end{aligned} \tag{7.14}$$

[6] Die Äquivalenz zu (7.9d) sieht man durch Taylor-Entwicklung von $\mathcal{F}$ für kleine $\epsilon\boldsymbol{\eta}$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\eta})\right]_{\epsilon=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left\{\mathcal{F}(\boldsymbol{u}) + \epsilon\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{u}} + O(\epsilon^2)\right\}\right]_{\epsilon=0} \\
&= \left[\left\{0 + \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{u}} + O(\epsilon)\right\}\right]_{\epsilon=0} = \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{u}}.
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{D} &= \delta\left\langle |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}(\nabla \boldsymbol{u} + \epsilon\nabla\boldsymbol{\eta}) : (\nabla \boldsymbol{u} + \epsilon\nabla\boldsymbol{\eta}) \right\rangle_{\epsilon=0} \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(|\nabla \boldsymbol{u}|^2 + 2\epsilon(\nabla\boldsymbol{\eta}) : (\nabla \boldsymbol{u}) + \epsilon^2|\nabla\boldsymbol{\eta}|^2\right) \right\rangle_{\epsilon=0} \\
&= 2\left\langle (\nabla\boldsymbol{\eta}) : (\nabla \boldsymbol{u}) \right\rangle \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} -2\left\langle (\nabla^2 \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} \right\rangle
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

Die Bedingung $\delta(\mathcal{I}/\mathcal{D}) = 0$ erfordert daher nach (7.13) für alle kinematisch zulässigen Funktionen $\boldsymbol{\eta}$

$$
\left\langle \left(\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{S} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\nabla^2 \boldsymbol{u} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} \right\rangle = 0. \tag{7.16}
$$

Wir können die Beschränkung $\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$ für die kinematisch zulässigen Funktionen aufheben, wenn wir diese Nebenbedingung mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren in die Gleichung mit aufnehmen. Dazu addiert man die *Null* in Form von $\langle -\pi(\boldsymbol{x})\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle$ zur Gleichung und fordert, daß π so bestimmt wird, daß $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ ist. Der *Lagrangesche Multiplikator* π ist hier eine Funktion, da die Inkompressibilität an jedem Raumpunkt gewährleistet sein muß. Nach partieller Integration resultiert dann aus (7.16)

$$
\left\langle \left(\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{S} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla\pi \right) \cdot \boldsymbol{\eta} \right\rangle = 0, \tag{7.17}
$$

wobei $\boldsymbol{\eta}$ jetzt nur noch der Randbedingung $\boldsymbol{\eta} = 0$ (feste Wände) genügen muß. Damit (7.17) für alle $\boldsymbol{\eta}$ erfüllt ist, muß gelten[7]

$$
\boxed{\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{S} - \frac{1}{\mathrm{Re}_E}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla\pi = 0,} \tag{7.18}
$$

mit $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ und $\boldsymbol{u} = 0$ auf dem Rand. Dies sind die **Euler-Lagrange-Gleichungen** für das Variationsproblem $\delta(\mathcal{I}/\mathcal{D}) = 0$. Man sieht, daß der Lagrangesche Multiplikator die Rolle des Drucks spielt. Daher kann man den Druck als die Größe auffassen, welche die Inkompressibilität sicherstellt.

Die aus dem Variationsproblem folgenden Euler-Lagrange-Gleichungen sind linear. Dies ist eine Konsequenz aus der Tatsache, daß wir die mittlere kinetische Energie als Maß der Störungen verwendet haben und daß der konvektive Term $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ im Mittel keine Änderung der Energie bewirken kann, $\langle \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}) \rangle = 0$. Die Amplitude der kinematisch zulässigen Störungen ist also für das Energie-Limit irrelevant.

[7] Nach dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung gilt $\forall\boldsymbol{\eta}\ \ \langle \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi} = 0$.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen stellen hier ein Eigenwertproblem dar mit Eigenwerten Re_E^{-1} und zugehörigen Eigenvektoren $[\boldsymbol{u}, \pi]$. Alle Eigenfunktionen sind stationär. Hier haben wir mit Re_E alle Reynoldszahlen bezeichnet, die das Funktional $\mathcal{I}/\mathcal{D}$ stationär machen. Die korrekte Energie-Grenze ist das Minimum aller dieser Eigenwerte Re_E. Damit wird sichergestellt, daß für alle $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_E$ die Energie aller kinematisch zugelassenen Störungen exponentiell abklingt (siehe (7.4)).

7.1.4. Vergleich mit dem linearen Stabilitätsproblem

Um das durch die Euler-Lagrange-Gleichungen gegebene Eigenwertproblem mit dem Eigenwertproblem zu vergleichen, das man bei der linearen Stabilitätsanalyse lösen muß, wird das lineare Stabilitätsproblem

$$\sigma \boldsymbol{u} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\nabla \pi + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{7.19}$$

in eine entsprechende Form gebracht. Mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \Bigg\{ \underbrace{\frac{1}{2} \left[\nabla \boldsymbol{U} + (\nabla \boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} \right]}_{\text{Deformations-Tensor S}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\nabla \boldsymbol{U} - (\nabla \boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} \right]}_{\text{Rotations-Tensor } \Omega} \Bigg\} \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{S} + \boldsymbol{u} \cdot \Omega + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{7.20}$$

und $\sigma \equiv 0$ (*exchange of stability*) sieht man, daß die beiden Probleme (7.18) und (7.19) identisch sind, bis auf die rot markierten Terme. Diese Terme beschreiben die Drehung der Störgeschwindigkeit in der Grundströmung ($\boldsymbol{u} \cdot \Omega$, anti-symmetrischer Beitrag) und die Advektion mit der Grundströmung ($\boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$). Beide Prozesse ändern die Energie der Störung nicht, haben aber einen Einfluß auf die lineare Stabilität. Nur wenn beide Terme verschwinden, etwa wenn $\boldsymbol{U} = 0$ ist, dann stimmt die Energie-Stabilitätsgrenze mit der linearen Stabilitätsgrenze überein. Im allgemeinen sind sie aber verschieden: $\mathrm{Re}_c \neq \mathrm{Re}_E$.[8]

Allgemein kann man zeigen, daß das Energie-Limit immer kleiner oder gleich der kritischen Reynoldszahl des linearen Stabilitätsproblems sein muß (Joseph, 1976*a*)

$$\mathrm{Re}_E \leq \mathrm{Re}_c. \tag{7.21}$$

[8]Für das Rayleigh-Bénard-Problem (thermische Instabilität des Wärmeleitungszustands in einer von unten beheizten Schicht) (Joseph, 1976*a*) oder für den Einsatz der Konvektion in einem von unten beheizten zylindrischen Behälter mit adiabatischer Seitenwand (Yamaguchi et al., 1984) ist der Grundzustand durch $\boldsymbol{U} = 0$ und ein lineares Temperaturprofil charakterisiert. Dann stimmt die linearisierte Impulsgleichung mit der Euler-Lagrange-Gleichung des Energie-Stabilitätsproblems überein. Die verbleibenden Gleichungen für das Temperaturfeld sind ebenfalls äquivalent. Aus diesem Grund kann man für das Rayleigh-Bénard-Problem zeigen, daß $\mathrm{Re}_E = \mathrm{Re}_c$.

7.1.5. Eine grobe Abschätzung des Energie-Limits

Eine grobe Abschätzung des Energie-Limits kann man folgendermaßen erhalten. Es seien $\{\lambda_i\}$ mit $i \in [1,2,3]$ die (ortsabhängigen) Eigenwerte des Deformationstensors $\mathrm{S}(\boldsymbol{x})$ und $\lambda_{\min} = \min_{i,\boldsymbol{x}}[\lambda_i(\boldsymbol{x})]$. Das Minimum $\lambda_{\min} < 0$ muß negativ sein, da $\mathrm{Spur}(S) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$ ist. Dann ist

$$\langle \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{S} \cdot \boldsymbol{u} \rangle \geq \lambda_{\min} \left\langle |\boldsymbol{u}|^2 \right\rangle. \tag{7.22}$$

Wenn wir diese Gleichung mit (-1) multiplizieren, erhalten wir

$$\mathcal{I} = -\langle \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{S} \cdot \boldsymbol{u} \rangle \leq -\lambda_{\min} \left\langle |\boldsymbol{u}|^2 \right\rangle \overset{\lambda_{\min}<0}{=} |\lambda_{\min}| \left\langle |\boldsymbol{u}|^2 \right\rangle = 2|\lambda_{\min}|\mathcal{E}. \tag{7.23}$$

Nach der Poincaré-Ungleichung (7.6) gilt

$$\mathcal{D} \geq 2\Lambda\mathcal{E}, \tag{7.24}$$

so daß

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{I} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathcal{D} \leq 2\left(|\lambda_{\min}| - \frac{\Lambda}{\mathrm{Re}}\right)\mathcal{E}. \tag{7.25}$$

Die Lösung der Ungleichung ist

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \exp\left[-2\left(\frac{\Lambda}{\mathrm{Re}} - |\lambda_{\min}|\right) t\right]. \tag{7.26}$$

Hieran sehen wir, daß die Energie für alle Störungen exponentiell zerfällt, wenn

$$\mathrm{Re} < \frac{\Lambda}{|\lambda_{\min}|} \tag{7.27}$$

ist. Damit haben wir eine recht konservative Abschätzung des stabilen Bereichs erhalten. Die dazu erforderlichen Maxi- bzw. Minimierungen lassen sich normalerweise leicht durchführen. Man sieht, daß große Dehnraten (große Werte von $|\lambda_{\min}|$) den Stabilitätsbereich reduzieren, also tendenziell Instabilität fördern. Eine bessere Abschätzung des Energie-Limits erhält man, wenn man das Variationsproblem numerisch löst.

7.2. Energie-Theorie für parallele Scherströmungen

Als Beispiel wollen wir nun die Energie-Theorie auf parallele Scherströmungen anwenden. Der Grundzustand sei $\boldsymbol{U} = U(y)\boldsymbol{e}_x$. Dann lautet der Deformationstensor

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{U} + (\nabla\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & U' & 0 \\ U' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$