

Die Lösbarkeitsbedingung für dieses System liefert die Dispersionsrelation

$$D(k, c; U_1, U_2) = \det \begin{vmatrix} U_2 - c & -(U_1 - c) \\ U_1 - c & U_2 - c \end{vmatrix} = (U_2 - c)^2 + (U_1 - c)^2 = 0. \quad (6.46)$$

Diese Relation kann man durch die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta U = U_1 - U_2$ und die mittlere Geschwindigkeit $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$ ausdrücken und erhält so¹²

$$c = \frac{\omega}{k} = \bar{U} \pm i \frac{\Delta U}{2}. \quad (6.47)$$

Der Geschwindigkeitssprung ΔU kann noch zugunsten des Geschwindigkeitsverhältnisses $R = \Delta U/2\bar{U}$ eliminiert werden

$$c = \frac{\omega}{k} = \bar{U}(1 \pm iR). \quad (6.48)$$

An dieser Gleichung sehen wir, daß die zeitliche Wachstumsrate der Normalmoden $\Im[\omega(k; \bar{U}, R)]$ proportional ist zur Wellenzahl k und der skalierten Geschwindigkeitsdifferenz R . Die reelle Phasengeschwindigkeit $\Re(c) = \bar{U}$ ist gleich der mittleren Geschwindigkeit. Die Wirbelschicht ist also instabil gegenüber Störungen aller Wellenzahlen, falls die Geschwindigkeitsdifferenz $R \neq 0$ von Null verschieden ist. Dies ist die *Kelvin-Helmholtz-Instabilität*. Je größer die Wellenzahl ist, desto schneller ist das exponentielle Wachstum der Störung. Die für $k \rightarrow \infty$ zunehmende Wachstumsrate führt zu einer Singularität (Diskontinuität der Krümmung der Wirbelschicht) in einer endlichen Zeit (siehe auch [Saffman, 1992](#)). Es gibt keine obere Grenze für die Wachstumsrate ($\Im(\omega) \rightarrow \infty$ for $k \rightarrow \infty$). Der schlagartige Zusammenbruch rührt daher, daß es keinen Wellenzahl-Cut-off gibt, wodurch das Wachstum für hohe Wellenzahlen begrenzt oder ganz unterdrückt würde. Die Abwesenheit eines Wellenzahl-Cut-offs ist dadurch bedingt, daß das Problem keine intrinsische Längenskala aufweist.

Instabilität einer homogenen endlich dicken Wirbelschicht

In realen Fluiden wird das Wachstum von Störungen mit hohen Wellenzahlen durch die Viskosität begrenzt, wobei die viskose Dämpfungsrate quadratisch mit der Wellenzahl zunimmt. Außerdem bewirkt die Viskosität, daß sich die Scherschicht räumlich entwickelt und in ihrer Dicke anwächst.¹³ Es ist daher naheliegend, eine dickere

¹²Denn

$$\begin{aligned} 2c^2 - 2(U_1 + U_2)c + U_1^2 + U_2^2 &= 0, \\ \left(c - \underbrace{\frac{U_1 + U_2}{2}}_{\bar{U}}\right)^2 &= \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)^2 - \frac{U_1^2 + U_2^2}{2} = -\frac{1}{4}(U_1^2 + U_2^2) + \frac{1}{2}U_1U_2, \\ (c - \bar{U})^2 &= -\frac{(U_1 - U_2)^2}{4} = -\frac{\Delta U^2}{4}. \end{aligned}$$

¹³Man nennt die freie viskose Scherschicht auch Mischungsschicht. Deren raum-zeitliche Entwicklung kann man mit einer Grenzschicht-Näherung berechnen (siehe auch [Criminale et al., 2003](#)).

6. Parallele Scherströmungen

Scherschicht für ein reibungsfreies Fluid zu untersuchen, wie sie durch das stückweise lineare Geschwindigkeitsprofil

$$U(y) = \begin{cases} 1, & y > 1, \\ y, & -1 \leq y \leq 1, \\ -1, & y < -1, \end{cases} \quad (6.49)$$

gegeben ist. Hierbei ist jetzt die Vortizität $\Omega(y) = -U'(y) = -1$ in einem Streifen um $y = 0$ homogen verteilt. Aufgrund der Rayleigh-Gleichung und da $U'' = 0$ ist, muß die Amplitude der Stromfunktion der Störung wieder (6.42) genügen. Zusammen mit dem exponentiellen Abklingen für $y \rightarrow \pm\infty$ können wir die Lösung zweckmäßig in der Form schreiben

$$\phi(y) = \begin{cases} Ae^{-ky}, & y > 1, \\ Be^{-ky} + Ce^{ky}, & -1 \leq y \leq 1, \\ De^{ky}, & y < -1. \end{cases} \quad (6.50)$$

Nun müssen wir die zwei Sprungbedingungen (6.44) an zwei Stellen auswerten, was auf insgesamt 4 Gleichungen führt

$$A - B + Ce^{2k} = 0, \quad (6.51a)$$

$$Be^{2k} + C - D = 0, \quad (6.51b)$$

$$k(1-c)A + [1 - k(1-c)]B + [1 + k(1-c)]e^{2k}C = 0, \quad (6.51c)$$

$$[1 + k(1+c)]e^{2k}B + [1 - k(1+c)]C + k(1+c)D = 0. \quad (6.51d)$$

Die Lösbarkeitsbedingung führt auf

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & e^{2k} & 0 \\ 0 & e^{2k} & 1 & -1 \\ k(1-c) & [1 - k(1-c)] & [1 + k(1-c)]e^{2k} & 0 \\ 0 & [1 + k(1+c)]e^{2k} & [1 - k(1+c)] & k(1+c) \end{vmatrix} = 0, \quad (6.52)$$

mit dem Ergebnis (Rayleigh, Lord, 1894)

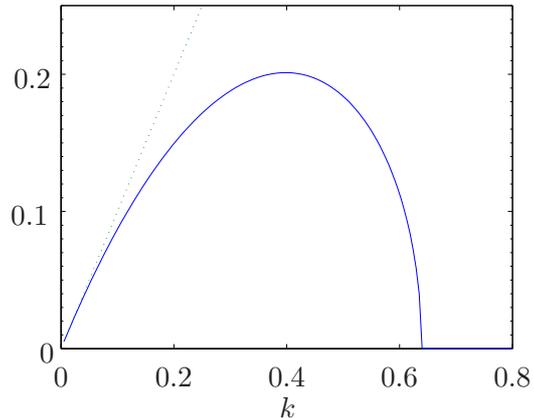
$$\frac{e^{4k}}{k^2(c^2 - 1)} (1 - 4k + 4k^2 - 4k^2c^2 - e^{-4k}) = 0, \quad (6.53)$$

mit den Wurzeln

$$\omega = ck = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - 2k)^2 - e^{-4k}}. \quad (6.54)$$

Man sieht sofort, daß der Radikant negativ werden kann, was instabilen Lösungen entspricht. Das Band von instabilen Wellenzahlen der *Kelvin-Helmholtz-Instabilität* ist begrenzt durch $k \in [0, k_c]$ mit $k_c = 0.6392$ (Nullstelle des Radikanten). Die Wachstumsrate $\Im(\omega)$ ist in Abb. 6.4 zusammen mit derjenigen für die unendlich dünne Scherschicht gezeigt.

Abbildung 6.4.: Wachstumsrate $\Im(\omega)$ nach (6.54) für Störungen in einer ebenen reibungsfreien Scherschicht mit einem stückweise linearen Geschwindigkeitsprofil (6.49) (durchgezogen) und die Wachstumsrate von Störungen einer unendlich dünne Scherschicht (gepunktet) nach (6.48) mit $\bar{U} = 0$ und $\Delta U = 2$.



Die Dicke der Vortizitätsschicht definiert eine Längenskala ($\Delta y = 2$), was eine Begrenzung des instabilen Wellenzahlbereichs bei k_c (cut-off) zur Folge hat. Normalmoden mit Wellenlängen kleiner als $\lambda < 2\pi/k_c = 9.829$ sind stabil. Weitere Fälle, auch mit stabilisierender Dichteschichtung im Schwerfeld, sowie Ergebnisse für $\tanh(y)$ -Profile (erstmal von Drazin behandelt) sind in Chandrasekhar (1961) und Drazin and Reid (1981) zu finden.

Ein heuristisches Argument für die Entwicklung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Obwohl die ∞ -dünne Wirbelschichtinstabilität zu einem unphysikalischen Ergebnis führt, kann dieses Modell eine physikalische Erklärung für den Instabilitätsmechanismus während des frühen Stadiums der Entwicklung liefern (Batchelor, 1967). Angenommen, die Position der ungestörten Wirbelschicht $y = 0$ ist durch eine sinusoidale Auslenkung $\eta(x)$ gestört (siehe Abb. 6.5). Entsprechend der elementaren Wirbeldynamik induziert eine gegebene Vortizitätsverteilung $\omega(\mathbf{x}, t)$ in jedem Raumpunkt ein Strömungsfeld, das durch das Biot-Savart-Gesetz¹⁴ beschrieben wird (Integral über die Vortizitätsverteilung)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' + \nabla\Phi. \quad (6.55)$$

Natürlich kann ein beliebiges wirbelfreies Feld $\nabla\Phi$ dazu addiert werden. Die Vortizität in der Nähe zweier Minima von η induziert am Ort des dazwischenliegenden Maximums von η netto eine Strömung, die genau entgegengesetzt ist zur Strömung, die an den Orten der Minima von η induziert wird. Daher wird die Vortizität an den Maxima von η in entgegengesetzter Richtung transportiert wie die Vortizität an den Minima von η . Dies führt zu einer periodischen Akkumulation der Vortizität an jeder Nullstelle von $\eta(x)$, an der $\Omega\partial_x\eta > 0$ ist (siehe Abb. 6.5). Dadurch verarmen die Punkte, an denen $\Omega\partial_x\eta < 0$ ist, an Vortizität. Dieser Prozeß führt zu einer Reihe von gleichsinnigen Kelvin-Helmholtz-Wirbeln (siehe Abb. 6.1), die ihrerseits die Deformation η der Wirbelschicht verstärken.

¹⁴Dies ist die Umkehrung von $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

6. Parallele Scherströmungen

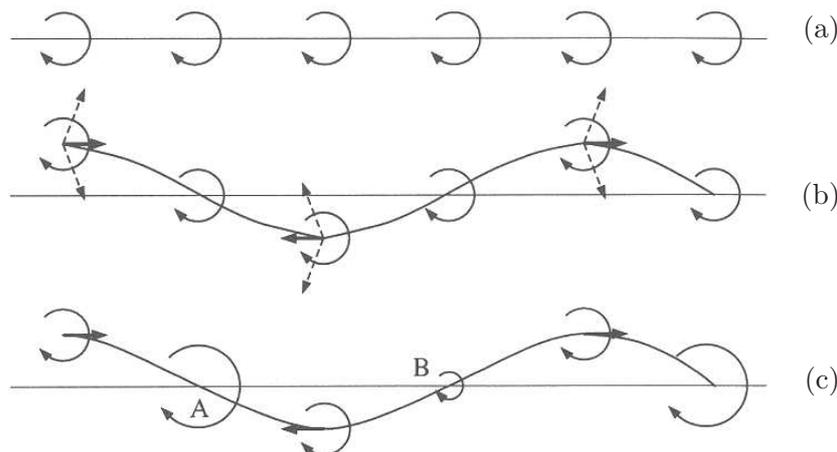


Abbildung 6.5.: Erklärung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität nach [Batchelor \(1967\)](#); (a) ungestörte Wirbelschicht, (b) bei einer gestörten Wirbelschicht wird ein Transport von Vortizität parallel und anti-parallel zur Stromrichtung induziert, (c) was zu einer Akkumulation von Vortizität führt.

Abbildung 6.6 zeigt die Simulation der Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit Hilfe von 25 Punktwirbeln, die sinusoidal aus der Ruhelage ausgelenkt wurden. Man erkennt die anfängliche Verstärkung der kleinen sinusoidalen Störung und die Verschiebung der Wirbel in x -Richtung. In Abb. 6.6e und 6.6f wird eine Instabilität sichtbar und die Dynamik wird komplexer (chaotisch). Die Akkumulation der Wirbel im Zentrum ist aber deutlich zu sehen. Der Einsatz der chaotischen Bewegung ist konsistent mit dem klassischen Ergebnis, daß eine geradlinige äquidistante Reihe gleicher Wirbel instabil ist. Bei der gefährlichsten Mode werden benachbarte Wirbel in entgegengesetzte Richtungen unter 45° zur Wirbelreihe ausgelenkt (*pairing instability*, siehe auch Vorlesung über Wirbeldynamik von hk).

6.2. Viskose Fluide

Wir wollen nun die Viskosität des Fluids in die Stabilitätsanalyse einbeziehen. Die folgenden Betrachtungen gelten nicht nur für ebene Kanalströmungen, sondern auch für allgemeine viskose ebene parallele Strömungen (z.B. für ebene Strahl-Profile).

6.2.1. Die viskosen Störungsgleichungen

Um die Viskosität zu berücksichtigen, betrachten wir die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{U}, \quad (6.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (6.57)$$

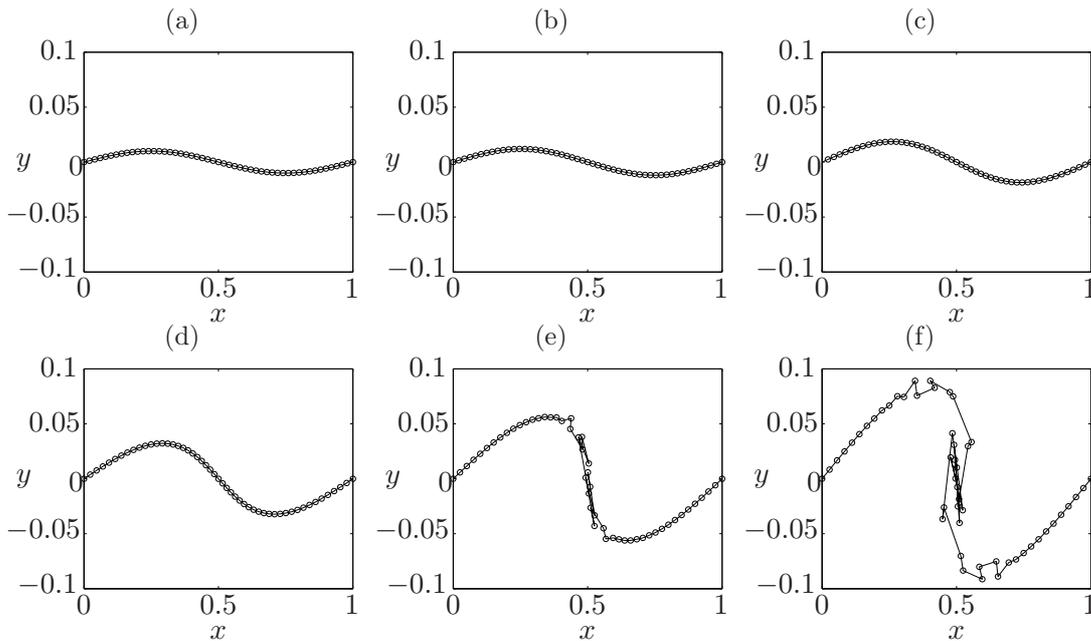


Abbildung 6.6.: Simulation der Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit Hilfe von 25 Punktwirbeln. Die Abbildungen zeigen die Anfangskonfiguration (a) und sukzessiv weitere Konfigurationen nach 5 äquidistanten Zeitschritten.

wobei wir wie in Abschnitt 6.1.1 charakteristische Skalen L und V verwendet haben, woraus sich die Reynoldszahl $\text{Re} = VL/\nu$ ergibt. Für ideale Fluide ist jede parallele Strömung eine Lösung der Eulergleichungen. Im viskosen Fall muß eine stationäre ebene parallele Strömung $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}_x$ die Gleichung

$$\frac{1}{\text{Re}}\partial_y^2 U(y) = \partial_x P \quad (6.58)$$

erfüllen. Da die linke Seite der Gleichung nicht von x abhängt und da die y - und z -Komponenten der Navier-Stokes-Gleichung $\partial_y P = \partial_z P = 0$ liefert, muß der Druck $P(x) \sim x$ eine lineare Funktion von x sein. Integration von (6.58) unter Berücksichtigung der Randbedingungen $U(y = y_{1,2} = \pm 1) = 0$ liefert zum Beispiel die klassische *ebene Poiseuille-Strömung*

$$\mathbf{U} = (1 - y^2)\mathbf{e}_x, \quad (6.59)$$

wobei wir als Längenskala L die halbe Kanalweite und als Geschwindigkeitsskala V die Geschwindigkeit auf der Mittellinie gewählt haben. Der konstante Druckgradient ist dann $\partial_x P = -2/\text{Re}$. Andere Lösungen sind die ebene *Couette-Strömung*, oder beliebige Kombinationen aus Couette- und Poiseuille-Strömung.¹⁵

¹⁵Manchmal werden auch viskose Strömungen betrachtet, die keine exakten Lösungen von (6.56)–(6.57) sind, aber eine gute Näherung darstellen, wie zum Beispiel das Grenzschichtprofil von

6. Parallele Scherströmungen

Wir wenden uns nun dem dreidimensionalen linearen Stabilitätsproblem zu. Mit der Zerlegung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{ges}}(\mathbf{x}, t) \\ P_{\text{ges}}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(y)\mathbf{e}_x \\ P(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \quad (6.60)$$

und den Normalmoden

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}(y) \\ \hat{p}(y) \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (6.61)$$

erhalten wir nahezu dieselben linearen Stabilitätsgleichungen wie in Abschnitt 6.1.1. Man muß (6.7a)–(6.7c) auf den rechten Seiten lediglich um die viskosen Terme, wie z. B. $\text{Re}^{-1}(-k_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2)\hat{v}$, ergänzen. Wir erhalten dann

$$ik_x [U(y) - c] \hat{u} + U'(y) \hat{v} = -ik_x \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_y^2 - k_x^2 - k_z^2) \hat{u}, \quad (6.62a)$$

$$ik_x [U(y) - c] \hat{v} = -\partial_y \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_y^2 - k_x^2 - k_z^2) \hat{v}, \quad (6.62b)$$

$$ik_x [U(y) - c] \hat{w} = -ik_z \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_y^2 - k_x^2 - k_z^2) \hat{w}, \quad (6.62c)$$

$$ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v} + ik_z \hat{w} = 0. \quad (6.62d)$$

Feste Randbedingungen zwischen parallelen Wänden bei $y = y_{1,2}$ erfordern

$$\mathbf{u}(y_{1,2}, t) = 0. \quad (6.63)$$

Die Lösbarkeitsbedingung für das resultierende lineare System liefert dann im Prinzip die *Dispersionsrelation*

$$D(\mathbf{k}, \omega; \text{Re}) = 0, \quad (6.64)$$

wobei $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z$ der Wellenvektor in der (x, z) -Ebene ist.

Blasius. Die Berechnung der viskosen Instabilität im Rahmen solcher Näherungen ist nur dann gerechtfertigt, wenn die typische Zeitskala für die Entwicklung der Störungen τ_{instab} wesentlich kleiner ist als die viskose Diffusionszeit $\tau_{\text{viskos}} = L^2/\nu$ auf welcher die Grundströmung variiert. Für Instabilitäten, die durch inertielle Mechanismen bedingt sind (wie in den vorangegangenen Abschnitten Strömungen mit Wendepunkten: Scherströmungen), ist diese Bedingung erfüllt, da sich die Störungen auf einer Zeitskala $\tau_{\text{inertial}} = L/V \ll \tau_{\text{viskos}} = L^2/\nu$ entwickeln, wenn die Reynoldszahl ($\text{Re} = \tau_{\text{viskos}}/\tau_{\text{inertial}} \gg 1$) hinreichend groß ist. Wenn viskose Strömungen ohne Wendepunkte approximiert werden, die für $\nu = 0$ stabil wären, muß man im Nachhinein immer überprüfen, ob $\tau_{\text{instab}} \ll \tau_{\text{viskos}}$ ist.

6. Parallele Scherströmungen

schneller wachsenden Mode bei einer *kleineren* Reynoldszahl sicher stellt, nicht jedoch die Existenz einer schneller wachsenden zweidimensionalen Moden bei *derselben* Reynoldszahl.

Ein Beispiel für die zweidimensionale Instabilität einer parallelen Strömung ist die *Kelvin-Helmholtz-Instabilität*, die in Abb. 6.1 gezeigt wurde.

6.2.3. Die Orr-Sommerfeld-Gleichung

Das Squire-Theorem für viskose Strömungen berechtigt uns, das zweidimensionale lineare Stabilitätsproblem zu betrachten. Wenn wir die Stromfunktion wie in (6.18) definiert verwenden, erhalten wir analog zur reibungsfreien Vortizitätsgleichung (6.20) die viskose für die Gesamtvortizität Vortizitätsgleichung

$$(\partial_t + \Psi_y \partial_x - \Psi_x \partial_y) \nabla^2 \Psi = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \Psi. \quad (6.70)$$

Durch Trennung der Störung ψ von der Grundströmung wie in (6.21) im reibungsfreien Fall,

$$\Psi(x, y, t) = \int U(y) dy + \psi(x, y, t), \quad (6.71)$$

erhalten wir eine Gleichung ähnlich wie die Rayleigh-Gleichung (6.28), nur daß der viskose Term $\text{Re}^{-1} \nabla^4 \psi$ hinzugekommen ist

$$[\partial_t + U \partial_x] \nabla^2 \psi - U'' \psi_x = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi. \quad (6.72)$$

Durch Einführung von Normalmoden $\psi = \phi(y) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}$ erhalten wir die bekannte *Orr-Sommerfeld-Gleichung* (zweidimensionale Störungen)

$$(U - c) [\phi'' - k^2 \phi] - U'' \phi = \frac{1}{ik \text{Re}} (\partial_y^2 - k^2)^2 \phi. \quad (6.73)$$

Die vier Randbedingungen (*no-slip*) lauten

$$\phi(y_{1,2}) = \phi'(y_{1,2}) = 0. \quad (6.74)$$

Um die zweidimensionale Dispersionrelation $D(k, \omega; \text{Re}) = 0$ zu erhalten, muß die Gleichung numerisch gelöst werden. Beachte, daß der viskose Term die Symmetrie der Eigenwerte c bzgl. der reellen Achse zerstört. Die Eigenwerte der Rayleigh-Gleichung traten in komplex konjugierten Paaren auf. Im viskosen Fall ist die Strömung instabil, wenn mindestens ein Eigenwert existiert, für den $\Im[c(k)] > 0$ ist.

Bei einer Strömung in einem endlichen Gebiet (zum Beispiel zwischen zwei Platten) besteht die Menge der Eigenwerte $\{\omega_i\}$ (das Spektrum) nur aus diskreten Werten. Man sagt: Das diskrete Spektrum ist vollständig. Andernfalls, z. B. bei Grenzschichtströmungen (Blasius-Profil), ist das diskrete Spektrum unvollständig. Neben dem diskreten Spektrum existiert auch noch ein kontinuierliches Spektrum.

Im reibungsfreien Fall ist das diskrete Spektrum des linearen Stabilitätsproblems für ebene Scherströmungen unvollständig. Im Extremfall gibt es nur ein kontinuierliches Spektrum.¹⁶

Man kann die Rayleigh-Gleichung durch den formalen Grenzübergang $\text{Re} \rightarrow \infty$ erhalten. Dieser Grenzübergang ist jedoch singulär, da sich die Ordnung der Differentialgleichung von 4 auf 2 verringert und wir keine 4 Randbedingungen mit nur zwei linear unabhängigen Lösungen erfüllen können. Daher müssen die viskosen Terme zwingend in den dünnen Grenzschichten in Wandnähe berücksichtigt werden.¹⁷

Für die viskose *ebene Couette-Strömung* $U(y) = y$ hat Romanov (1973) bewiesen, daß sämtliche Normalmoden für $k \geq 0$ und $\text{Re} \geq 0$ abklingen. Die ebene Couette Strömung ist daher linear stabil für alle Reynoldszahlen. Dies gilt nicht für die *ebene Poiseuille-Strömung* (6.59). Wenn man die Reynoldszahl mit der halben Kanalhöhe bildet, ist die kritische Reynoldszahl der ebene Poiseuille-Strömung $\text{Re}_c = 5779$ bei $k_c = 1.021$ und $c = 0.269$ (Lanzerstorfer, 2012, für ältere Werte, siehe auch Tabelle 1.1). Die kritische Mode wird *Tollmien-Schlichting-Welle* genannt und ist in Abb. 6.7a dargestellt.¹⁸ Die entsprechende neutrale Kurve, entlang welcher $\Im(c) = 0$ ist,

¹⁶Für die ebene Couette-Strömung einer idealen Flüssigkeit ist das Spektrum rein kontinuierlich. Die Orr-Sommerfeld-Gleichung liefert für $U = ye_x$ mit $\nu = 0$

$$(c - y) [\partial_y^2 - k^2] \phi = 0,$$

mit $\phi(y = \pm 1) = 0$. Angenommen es ist $c \notin [-1, 1]$, dann muß gelten

$$[\partial_y^2 - k^2] \phi = 0,$$

mit der Lösung $\phi = A \cosh(ky) + B \sinh(ky)$ und $\phi(y = \pm 1) = 0$. Daraus folgt aber $\phi = 0$. In diesem Fall gibt es keine nichttriviale (von Null verschiedene) Normalmode. Falls aber $c \in [-1, 1]$ ist, dann muß gelten

$$[\partial_y^2 - k^2] \phi = \delta(c - y),$$

denn $(c - y)\delta(c - y) = 0$. Die Amplitude wurde hier normiert. Die Lösung ist die Greensche Funktion von $\partial_y^2 - k^2$

$$\phi = \frac{\sinh[k(c \pm 1)] \sinh[k(y \mp 1)]}{k \sinh(2k)},$$

wobei für das obere Vorzeichen $y \in [c, 1]$ und für das untere $y \in [-1, c]$. Da für jedes k die Phasengeschwindigkeit einen beliebigen Wert im Intervall $[-1, 1]$ annehmen kann, hat man ein kontinuierliches Spektrum. Siehe dazu auch Drazin and Reid (1981), S. 150ff.

¹⁷Die viskosen Terme müssen auch in der Nähe von Singularitäten y_c , an denen $U(y_c) = c$ ist, berücksichtigt werden.

¹⁸Aufgrund des Rayleigh-Kriteriums (für ideale Fluide) müßte die Poiseuille-Strömung eigentlich stabil sein, da $U(y)$ keinen Wendepunkt besitzt. Die Instabilität der Poiseuille-Strömung muß daher mit der Viskosität zusammenhängen. Hinweise darauf gibt auch die kritische Mode in Abb. 6.7a: Die kritische Mode ist symmetrisch bezüglich der Mittelebene $y = 1$. Auch bezüglich einer Inversion der x -Achse ist die Mode *nahezu* symmetrisch. Deshalb ist die Transferrate von kinetischer Energie (durch inertielle Effekte, farbig in der Abbildung) von der Grundströmung zur Störung nahezu Null. Nur die leichte Asymmetrie der Mode in unmittelbarer Wandnähe führt in Summe zu einer positiven Energietransferrate, welche die viskose Dissipation (nicht gezeigt) kompensieren kann.

6. Parallele Scherströmungen

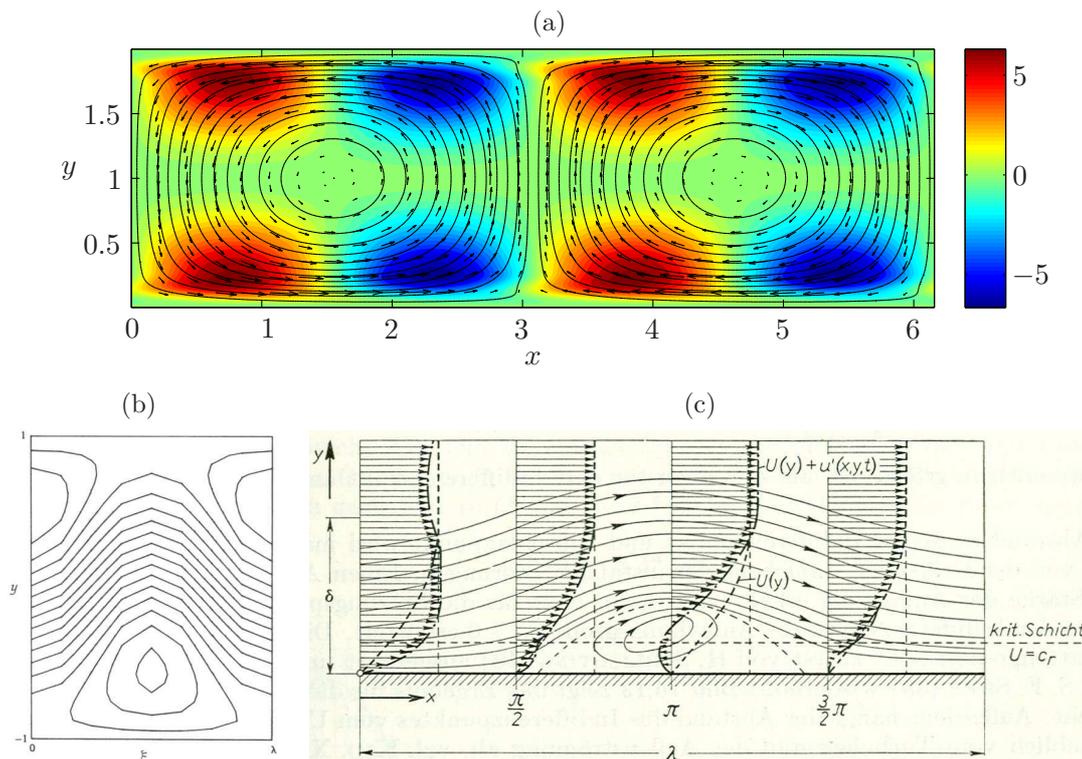


Abbildung 6.7.: (a) Stromlinien der kritischen Tollmien-Schlichting-Welle in der Poiseuille-Strömung am kritischen Punkt mit $k_c = 1.021$, $\omega_c = 0.269$ bei $Re = 5779$ nach Lanzerstorfer (2012). Die Energietransferrate $-\mathbf{u} \cdot [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_0] = -wv\partial u_0/\partial y$ ist in Farbe dargestellt. Die Welle läuft nach links (entgegen der Richtung der Grundströmung). (b) Tollmien-Schlichting-Welle (mit endlicher Amplitude) in der ebenen Poiseuille-Strömung. Gezeigt sind Stromlinien der Gesamtströmung über eine Wellenlänge in einem mit der Welle mitbewegten System (x -Achse gestaucht) (nach Orszag and Patera, 1983). (c) Neutral stabile Tollmien-Schlichting-Welle (mit endlicher Amplitude dargestellt) vom unteren Zweig der Instabilitätszunge (Abb. 6.8b) in einer Plattengrenzschicht (Blasiusprofil) für $Re_1 = U_\infty \delta_1/\nu = 893$ (δ_1 : Verdrängungsdicke) und $\lambda = 2\pi/k = 40\delta_1$ (nach Schlichting, 1968). Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist $\Re(c) = 0.35 U_\infty$.

ist in Abb. 6.8a gezeigt.

Für die *Hagen-Poiseuille-Rohrströmung* (1.4) existiert kein Squire-Theorem.¹⁹ Alle numerische Evidenz deutet jedoch darauf hin, daß auch die Rohrströmung für alle Reynoldszahlen linear stabil ist. Ein strenger mathematischer Beweis fehlt jedoch bisher.

In Abb. 6.7c ist die Überlagerung des Blasius-Profiles und einer neutral stabilen Tollmien-Schlichting-Welle endlicher Amplitude gezeigt. Das Blasius-Profil wurde quasi-konstant angenommen (keine Abhängigkeit von x). Die Schnittpunkte der Profile der totalen Strömung U_{ges} (durchgezogen) mit denjenigen der Grundströ-

¹⁹Aufgrund der Geometrie sind die Normalmoden keine einfachen ebenen Wellen.

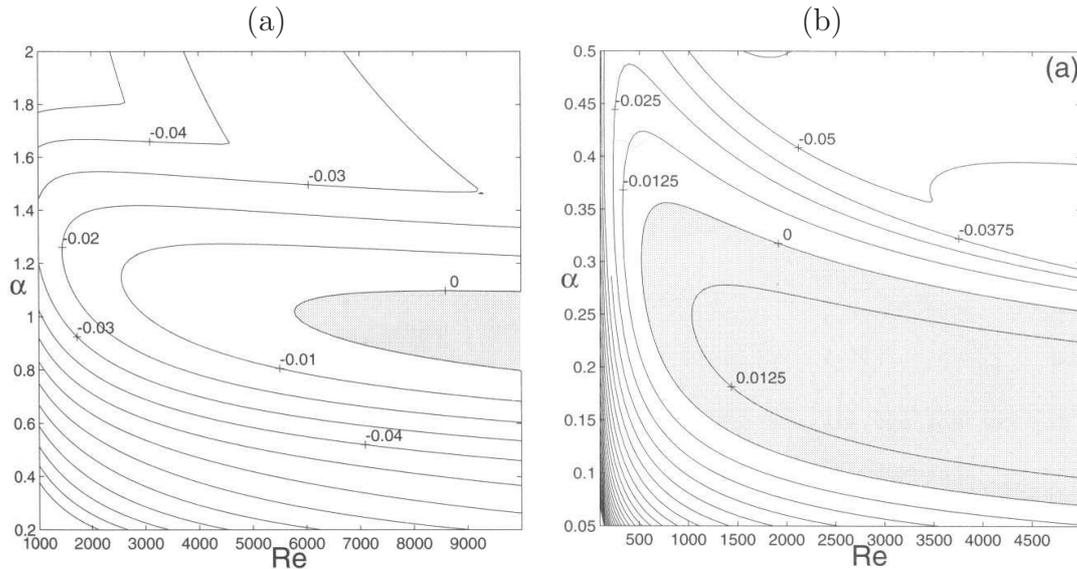


Abbildung 6.8.: Kurven neutraler Stabilität für (a) die ebene Poiseuille-Strömung mit $Re_c = 5772.2$ bei $k_c = 1.020$ und Phasengeschwindigkeit $\Re(c_c) = 0.2639$ und (b) für die Blasius-Grenzschicht mit $Re_c = 519.4$ bei $k_c = 0.303$ und Phasengeschwindigkeit $\Re(c_c) = 0.3965$ (nach Schmid and Henningson, 2001). Die Reynoldszahl für die Blasius-Grenzschichtströmung ist $Re = U_\infty \delta_1 / \nu$, wobei δ_1 die Verdrängungsdicke ist. In den grauen schattierten Gebieten ist die Grundströmung linear instabil. Die Linien markieren konstante Wachstumsraten $\Im(c) = \text{const}$. Hier ist $\alpha = k$ die Wellenzahl.

mung U (gestrichelt) weisen darauf hin, daß das Zentrum der Wirbel der neutral stabilen Tollmien-Schlichting-Welle in etwa bei $y \approx 0.9\delta$ liegt. Wenn die Amplitude der TS-Welle von infinitesimalen Werten ansteigt (was nicht wirklich realisierbar ist), dann hat man an periodischen Stellen eine marginale Ablösung, d.h. es entstehen periodisch infinitesimal kleine Rückströmungsgebiete direkt an der Wand. Dort hat die Grundströmung (Blasiusprofil) auch einen Wendepunkt.

Trotz der linearen Stabilität der ebenen Couette-Strömung wird im Experiment ein Umschlag der Strömung beobachtet, wobei die Strömung in einer komplizierten Weise zeitabhängig und dreidimensional wird. Selbst bei der ebenen Poiseuille-Strömung findet dieser Umschlag schon bei Reynoldszahlen statt, die wesentlich geringer sind als $Re_c = 5779$. In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu beachten, daß die Orr-Sommerfeld-Gleichung und das Squire-Theorem nur für infinitesimale Störungen gelten (linearisierte Gleichungen). Zur vollständigen Behandlung des Stabilitätsproblems müssen aber *alle* Störungen berücksichtigt werden, insbesondere auch solche mit großer Amplitude. Wegen der damit verbundenen Nichtlinearitäten ist dieses allgemeine Stabilitätsproblem nicht in geschlossener Form lösbar. Es ist jedoch möglich, eine Energie-Reynoldszahl Re_E anzugeben, so daß für $Re < Re_E$ **alle** Störungen (siehe Abb. 1.13) exponentiell abklingen. Mit Hilfe der sogenannten *Energie-Stabilitäts-Theorie* kann die monotone Stabilitätsgrenze nach unten hin

6. Parallele Scherströmungen

abgeschätzt werden.