

## 6. Parallele Scherströmungen

Die partielle Integration des ersten Terms liefert unter Verwendung der Randbedingungen  $\phi(y_1) = \phi(y_2) = 0$

$$\underbrace{\int_{y_1}^{y_2} [|\phi'|^2 + k^2|\phi|^2] dy}_{\in \mathbb{R} \text{ falls } k \in \mathbb{R}} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''|\phi|^2}{U-c} dy = 0. \quad (6.30)$$

Unter Beachtung von

$$\frac{1}{U-c} = \frac{U-c^*}{|U-c|^2} = \underbrace{\frac{U-\Re(c)}{|U-c|^2}}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\frac{\Im(c)}{|U-c|^2}}_{\in \mathbb{R}}, \quad (6.31)$$

erhalten wir aus dem Imaginärteil von (6.30)

$$\Im(c) \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''|\phi|^2}{|U-c|^2} dy = 0. \quad (6.32)$$

Falls die Grundströmung nun für irgendein  $k \in \mathbb{R}$  instabil ist, so ist  $\Im(c) \neq 0$ . Damit (6.32) erfüllt ist, muß dann aber der Integrand mindestens eine Nullstelle im Intervall  $y \in [y_1, y_2]$  haben. Dies ist das berühmte *Wendepunkt-Kriterium von Rayleigh*:

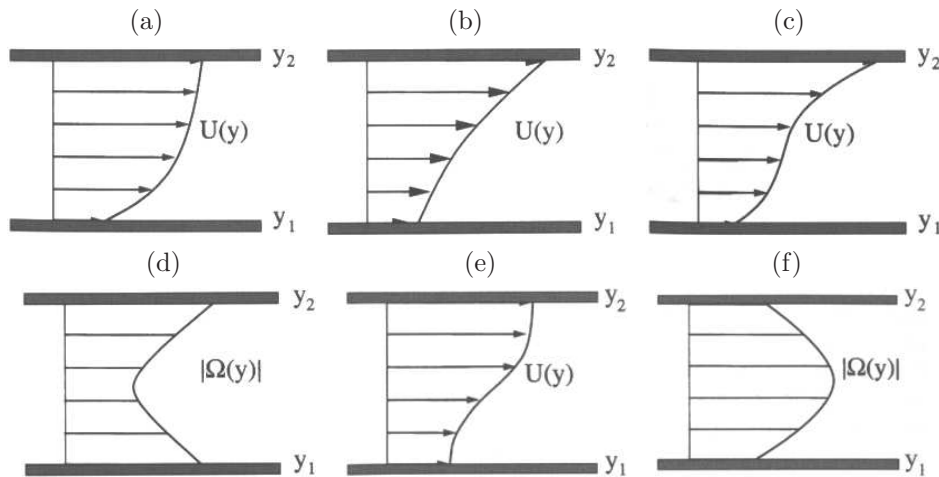
Wenn eine reibungsfreie parallele Strömung instabil ist, besitzt das Geschwindigkeitsprofil  $U(y)$  mindestens einen Wendepunkt bei  $y_s \in [y_1, y_2]$ , so daß  $U''(y_s) = 0$  ist (notwendige Bedingung).

Beachte die Negation dieses Theorems: Wenn das Geschwindigkeitsprofil  $U(y)$  keinen Wendepunkt besitzt, dann ist die zugehörige zweidimensionale reibungsfreie parallele Strömung linear stabil. Dies ist eine wichtige Feststellung, da sie die Instabilität durch inertielle Wechselwirkung zwischen Störung und Grundströmung für eine Reihe von Strömungen ausschließt. Zum Beispiel ist die ebene Poiseuille-Strömung im Rahmen der Theorie reibungsfreier Strömungen linear stabil, da sie keinen Wendepunkt besitzt. Daher müssen andere Mechanismen (Nichtlinearität, Viskosität) für die Instabilität dieser Strömungen verantwortlich sein. Das Blasius-Profil ist ein Grenzfall, weil es einen Wendepunkt am Rand bei  $y = 0$  besitzt.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Rayleigh's Wendepunkt-Kriterium kann auch als Erhaltung des mittleren Impulses in  $x$ -Richtung der Gesamtströmung interpretiert werden. Man kann nämlich im Rahmen der linearen Theorie zeigen (Huerre and Rossi, 1998)

$$\frac{d}{dt} \int_{y_1}^{y_2} \bar{U} dy = \int_{y_1}^{y_2} \partial_y \tau_{xy} dy = \tau_{xy}(y_2) - \tau_{xy}(y_1) = 2k\Im(c)e^{2k\Im(c)t} \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''|\phi|^2}{|U-c|^2} dy = 0,$$

wobei  $\bar{U}(y, t)$  die über  $x$  und  $z$  gemittelte Gesamtströmung ist, also der Änderungsrate des  $x$ -Impulses der gesamten Strömung ist. Die Änderung wird durch die Reynolds-Spannungen  $\tau_{xy} = -\bar{u}v$  hervorgerufen, wobei aber nur die Abweichungen von der Grundströmung eingehen (räumliche Mittelung in  $x$ - und  $z$ -Richtung). Der obige Ausdruck muß verschwinden, da die Reynolds-Spannung  $\tau_{xy}$  auf dem Rand verschwinden muß. Im Rahmen der linearen Approximation kann man die Reynoldspannung  $-\bar{u}v$  durch das Integral ausdrücken, welches auch bei der Ableitung des Rayleigh-Kriteriums (6.32) auftritt.



**Abbildung 6.2.:** Einige Beispiele zur Anwendung der Kriterien nach Rayleigh und Fjørtoft (Abbildungen nach [Huerre and Rossi \(1998\)](#)). (a,b): Stabil gemäß Rayleigh-Kriterium, (c,d): Stabil gemäß Fjørtoft-Kriterium, (e,f): Möglicherweise instabil gemäß Fjørtoft-Kriterium.

Einige Beispiele für mögliche Strömungsprofile sind in Abb. 6.2 gezeigt. Das in Abb. 6.2e gezeigte Profil stimmt qualitativ mit der Grundströmung in Abb. 6.1 überein und motiviert so die dort dargestellte Kelvin-Helmholtz-Instabilität.

Eine Verschärfung des Rayleigh-Kriteriums stellt das *Fjørtoft-Theorem* dar. Dazu betrachten wir den Realteil von (6.30) und finden mit (6.31)

$$-\int_{y_1}^{y_2} [|\phi'|^2 + k^2|\phi|^2] dy = \int_{y_1}^{y_2} \Re \left\{ \frac{U''|\phi|^2}{U-c} \right\} dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{[U - \Re(c)] U'' |\phi|^2}{|U-c|^2} dy < 0. \quad (6.33)$$

Für eine instabile Strömung gilt aufgrund des Rayleigh-Kriterium

$$(\Re(c) - U_*) \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} \frac{U''|\phi|^2}{|U-c|^2} dy}_{=0} = 0, \quad (6.34)$$

wobei  $U_* = U(y_*)$  mit  $y_* \in [y_1, y_2]$  die Geschwindigkeit an irgendeiner Zwischenstelle  $y_*$  sein kann. Wenn wir nun (6.34) zu (6.33) addieren und  $U_* = U_s$  wählen ( $U_s'' = 0$ ), dann erhalten wir

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{U''(U - U_s)|\phi|^2}{|U-c|^2} dy < 0. \quad (6.35)$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, muß  $U''(U - U_s) < 0$  mindestens in einem Teil des Intervalls  $[y_1, y_2]$  negativ sein. Dies ist *Fjørtoft's Theorem*:

Wenn eine ideale parallele Strömung  $U(y)$  instabil ist, dann muß in einem Teil des Intervalls  $[y_1, y_2]$  gelten:  $U''(U - U_s) < 0$ , wobei  $y_s$  ein Wendepunkt ist, d.h.  $U_s'' = U''(y_s) = 0$ .

## 6. Parallele Scherströmungen

Dies ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für Instabilität. Die Umkehrung besagt: Wenn im gesamten Intervall  $[y_1, y_2]$   $U''(U - U_s) > 0$  ist, dann ist eine ideale Strömung stabil.

Die Kriterien von Rayleigh und Fjørtoft können auch durch die Vortizität des Grundzustands ausgedrückt werden. Da

$$\Omega = -U'(y), \quad (6.36)$$

erfordert das Rayleigh-Kriterium  $\Omega'(y_s) = 0$ . Im Falle einer Instabilität muß also ein Extremum der Vortizität vorliegen.

Dieses Kriterium wird durch Fjørtoft verschärft. Entscheidend sind hier die Vorzeichenverhältnisse von  $U''$  und  $U - U_s$  in der Nähe des Wendepunkts. In der Umgebung des Wendepunkts können wir  $U$  und  $U''$  entwickeln

$$U(y) = U_s + U'_s(y - y_s) + \frac{U''_s}{2}(y - y_s)^2 + \dots, \quad (6.37a)$$

$$U''(y) = U''_s + U'''_s(y - y_s) + \dots, \quad (6.37b)$$

und finden so

$$U''(U - U_s) = [U''_s + U'''_s(y - y_s) + \dots] \left[ U'_s(y - y_s) + \frac{U''_s}{2}(y - y_s)^2 + \dots \right]$$

$$\stackrel{U''_s=0}{=} U'_s U'''_s (y - y_s)^2 + \dots < 0 \quad (\text{Fjørtoft}). \quad (6.38)$$

Andererseits gilt für die Entwicklung von  $\Omega^2$  um  $y_s$

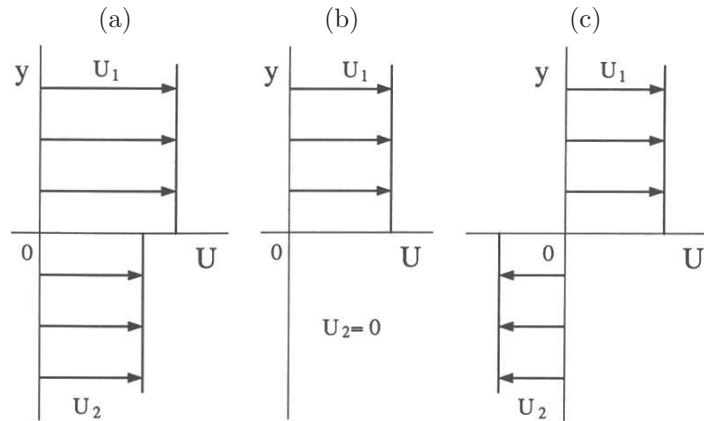
$$\Omega^2(y) = U'^2(y) = \left[ U'_s + U''_s(y - y_s) + \frac{U'''_s}{2}(y - y_s)^2 + \dots \right]^2$$

$$\stackrel{U''_s=0}{=} U'^2_s + \underbrace{U'_s U'''_s (y - y_s)^2}_{\text{Fjørtoft: } < 0} + \dots \quad (6.39)$$

Daher verlangt das Fjørtoft-Kriterium, daß das Extremum der Vortizität am Wendepunkt in der Tat ein Maximum des Betrags der Vortizität sein muß (vgl. Abb. 6.2d,f).

Es muß beachtet werden, daß beide Kriterien, das Rayleigh- und das Fjørtoft-Theorem, *notwendig* aber *nicht hinreichend* für eine Instabilität sind. Ein Gegenbeispiel ist das Profil  $U = \sin y$ . Es hat periodische Wendepunkte, ist aber trotzdem stabil (Tollmien, 1935). Tollmien hat aber auch heuristische Argumente geliefert, wonach symmetrische Geschwindigkeitsprofile mit Wendepunkten und monotone Profile (Grenzschichten) mit Wendepunkten notwendig instabil sein sollten. Der Beweis dafür wurde von von Mises and Friedrichs (1971) und Lin (1945) erbracht. In diesen Fällen ist das Rayleigh-Kriterium auch hinreichend.

Mehr zu ebenen Scherströmungen kann man in Drazin and Reid (1981) finden. In Criminale et al. (2003) findet man auch noch weitere Kriterien, welche den Wertebereich von instabilen Eigenwerten  $c$  in der komplexen Ebene eingrenzen (z.B. Howards Halbkreis-Theorem).



**Abbildung 6.3.:** Geschwindigkeitsprofile einer Wirbelschicht für verschiedene skalierte Geschwindigkeitsdifferenzen  $R = \Delta U/2\bar{U}$ : (a)  $|R| \ll 1$ , (b)  $|R| = 1$  und (c)  $|R| > 1$ .

### Instabilität einer dünnen Wirbelschicht

Die ebene Scherströmung  $U(y) = A \tanh(ay)$  besitzt einen Wendepunkt und ist daher nach Rayleigh möglicherweise instabil. Ein ähnliches, aber einfacheres Profil stellt eine ebene Wirbelschicht dar, welche wir im folgenden behandeln wollen. In einer reibungsfreien Flüssigkeit kann die Geschwindigkeit sprunghaft variieren. Daher betrachten wir den einfachen Grundzustand

$$U(y) = \begin{cases} U_1, & y > 0, \\ U_2, & y < 0, \end{cases} \quad (6.40)$$

mit  $U_1 > U_2$ . Mögliche Fälle sind in Abb. 6.3 gezeigt. Diese Geschwindigkeitsverteilung entspricht einer singulären Vortizitätsverteilung<sup>10</sup>

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times U(y)\mathbf{e}_x = -U'(y)\mathbf{e}_z = -\underbrace{(U_1 - U_2)}_{=\Delta U} \delta(y)\mathbf{e}_z = -\Delta U \delta(y)\mathbf{e}_z. \quad (6.41)$$

Da die Grundströmung in beiden Regionen konstant ist (insbesondere ist  $U'' = 0$ ), reduziert sich die Rayleigh-Gleichung (6.28) für die Amplitude der Stromfunktion der Störung zu

$$\phi''(y) - k^2\phi(y) = 0. \quad (6.42)$$

Die Lösungen dieser Gleichung, die für  $y \rightarrow \pm\infty$  exponentiell zerfallen, lauten ( $\Re(k) > 0$ )

$$\phi(y) = \begin{cases} \phi_1(y) = A_1 e^{-ky}, & y > 0, \\ \phi_2(y) = A_2 e^{ky}, & y < 0. \end{cases} \quad (6.43)$$

<sup>10</sup>Denn das Geschwindigkeitsfeld wird korrekt wiedergegeben:

$$U(y) = U_2 + \int_{-\infty}^y U'(\tilde{y}) d\tilde{y} \stackrel{(6.41)}{=} U_2 + \int_{-\infty}^y \Delta U \delta(\tilde{y}) d\tilde{y} = \begin{cases} U_2 + \Delta U = U_1, & y \geq 0, \\ U_2 + 0, & y < 0. \end{cases}$$

## 6. Parallele Scherströmungen

Die unbekanntenen Koeffizienten  $A_{1,2}$  müssen durch die Sprungbedingungen an der Diskontinuitätsfläche bei  $y_0 = 0$  bestimmt werden. Man kann zeigen (Huerre and Rossi, 1998), daß die kinematische (gleiche Deformation der Grenzfläche auf beiden Seiten) und die dynamische Randbedingung (Kontinuität des Drucks) erfordern<sup>11</sup>

$$\left[ \frac{\phi(y)}{c - U(y)} \right]_{y_0^-}^{y_0^+} = 0, \quad (6.44a)$$

$$[U'(y)\phi(y) - [U(y) - c]\phi'(y)]_{y_0^-}^{y_0^+} = 0, \quad (6.44b)$$

wobei der Sprung irgendeiner Funktion  $f$  als  $[f]_{y_0^-}^{y_0^+} = f(y \downarrow y_0) - f(y \uparrow y_0)$  definiert ist. Die Sprungbedingungen führen auf

$$(U_2 - c)A_1 - (U_1 - c)A_2 = 0, \quad (6.45a)$$

$$(U_1 - c)A_1 + (U_2 - c)A_2 = 0. \quad (6.45b)$$

---

<sup>11</sup>Da die Diskontinuitätsfläche eine substantielle Fläche ist und sich mit der Strömung  $\mathbf{u}_{\text{ges}}(x, y, t) = [U(y) + u(x, y, t)]\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y$  bewegt, muß für ein substantielles Fluidelement am Ort  $\boldsymbol{\xi}(x, y, t)$  in der Fläche gelten

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{u}_{\text{ges}}.$$

Wenn wir die Lage der Diskontinuität durch die  $y$ -Koordinate  $y = y_0 + \eta(x, t) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_y$  beschreiben, erhalten wir aus der  $y$ -Koordinate der obigen kinematischen Bedingung

$$\mathbf{e}_y \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{u}_{\text{ges}} = v.$$

Daraus folgt

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u}_{\text{ges}} \cdot \nabla \eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} + [U(y) + u(x, y, t)] \frac{\partial \eta}{\partial x} = v(x, y, t).$$

Diese Bedingung muß auf  $y = y_0 + \eta(x, t)$  erfüllt sein. Da  $\eta$  eine infinitesimale Deformation ist (auch  $u$  und  $v$  sind infinitesimal), können wir alle Größen an der Stelle  $y = y_0 + \eta(x, t)$  durch eine Taylor-Entwicklung um  $y = y_0$  ausdrücken und erhalten in niedrigster Ordnung

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + U(y_0^\pm) \frac{\partial}{\partial x} \right] \eta = v(x, y_0^\pm, t) + \text{quadratische Terme.}$$

Diese Relation gilt für beide Seiten der Diskontinuitätsfläche ( $y_0^\pm$ ). Da  $\eta = \hat{\eta}e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}$ , erhalten wir zusammen mit (6.26b)

$$\phi(y_0^\pm) = -[U(y_0^\pm) - c]\hat{\eta}, \quad \text{oder} \quad \frac{\phi(y_0^\pm)}{[U(y_0^\pm) - c]} = -\hat{\eta}.$$

Da  $\hat{\eta}$  eindeutig ist, folgt daraus die Bedingung (6.44a). In ähnlicher Weise folgt aus der Kontinuität des Drucks  $[\hat{p}(y)]_{y_0^-}^{y_0^+}$  unter Verwendung von (6.26a), (6.26b) und (6.7a) die zweite, dynamische Sprungbedingung (6.44b).