

9.4. Komplexe Wellenzahlen und Frequenzen

Die jeweilige physikalische Bedeutung der obigen zeitlichen und räumlichen Moden hängt von der Art des Antriebs $S(x, t)$ ab. Um zu sehen, wie diese Grenzfälle aus allgemeinen Dispersionsrelation hervorgehen, müssen wir den allgemeinen Fall betrachten, in dem $\omega \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{C}$ beide komplex sind. Im Vorfeld der Betrachtungen wollen wir uns einige elementare Eigenschaften analytischer Funktionen eines komplexen Arguments in Erinnerung rufen.

9.4.1. Exkurs: Einige elementare Fakten über analytische Funktionen

1. Was ist eine analytische Funktion? Eine komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ eines komplexen Arguments $z = x + iy$, $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}$, ist analytisch im Punkt a , wenn sie bezüglich des Arguments z im Punkt a differenzierbar ist. Diese Bedingung ist äquivalent zur Forderung, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (9.15)$$

erfüllt sind. Wenn die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind, dann werden u und v als harmonische Funktionen bezeichnet und sie erfüllen die Laplace-Gleichung (das kann man einfach sehen). Punkte in der komplexen Ebene, in denen eine Funktion analytisch ist, werden reguläre Punkte genannt. Alle algebraischen und transzendenten Funktionen von z sind analytisch mit

(9.12)

$$k_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-iU \pm \sqrt{4i\omega + 4a} \right].$$

In Polardarstellung ist dann $i\omega + a = be^{i\phi}$, wobei $|\phi| < \pi/2$ sein muß wegen $a > 0$. Dann ist $\sqrt{i\omega + a} = \sqrt{b}e^{i\phi/2} = \sqrt{b}[\cos(\phi/2) + i\sin(\phi/2)]$ mit $b > 0$. Deshalb ist minimale Wert, den $|k'|$ annehmen kann, $|k'|_{\min} = \min\{|\Re\{\sqrt{i\omega + a}\}|\} = \sqrt{b} \cos(\pi/4)$.

Ausnahme von speziellen singulären Punkten.⁸

2. Es sei $f(z) = u + iv$ eine analytische Funktion von z . Dann ist das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad (9.16)$$

unabhängig vom Integrationsweg und $F'(z) = f(z)$.⁹

3. Aus (2.) folgt, daß das geschlossene Linienintegral über eine analytische Funktion verschwindet, wenn die Funktion überall in dem von dem Weg eingeschlossen einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch ist, d.h., falls in dem Gebiet keine singulären Punkte befinden. Dann gilt das *Cauchysche Theorem*

$$\oint f(z) dz = 0. \quad (9.17)$$

⁸Um zu sehen, wo die Cauchy-Riemann-Gleichungen herkommen, betrachten wir die komplexe Funktion $f(z)$. Die partiellen Ableitungen nach den reellen Koordinaten x und y können mit der Kettenregel berechnet werden

$$\begin{aligned} \partial_x f(z) &= f'(z) \underbrace{\partial_x z}_{=1} = \partial_x u + i \partial_x v, \\ \partial_y f(z) &= f'(z) \underbrace{\partial_y z}_{=i} = \partial_y u + i \partial_y v. \end{aligned}$$

Falls die Ableitung von f nach z , $f'(z)$, existiert, können wir $f'(z)$ zwischen den beiden Gleichungen eliminieren und erhalten

$$\partial_x u + i \partial_x v = (-i) (\partial_y u + i \partial_y v).$$

Wenn man den Real- und den Imaginärteil dieser Gleichung bildet, erhält man genau die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen folgen daher direkt aus der Existenz der Ableitung $f'(z)$. Beachte, daß es komplexe Funktionen gibt, für welche keine Ableitung nach z existiert. Typischerweise sind diese Funktionen nicht in der Form $f(z)$ angegeben sondern durch die separate Angabe von $u(x, y)$ und $v(x, y)$. Zum Beispiel ist $f = u + iv$ mit $u = 2x + y$ und $v = x + 2y$ nirgendwo analytisch.

⁹Für die Berechnung von Integralen in der komplexen Ebene ist es meist sinnvoll, den Weg in der Form $x = x(s)$ und $y = y(s)$ zu parametrisieren, wobei s zum Beispiel die Bogenlänge sein kann. Dann kann man das Integral als ein Linienintegral schreiben

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz &= \int_{x_1+iy_1}^{x_2+iy_2} [u(x, y) + iv(x, y)] (dx + i dy) \\ &= \int_{x_1+iy_1}^{x_2+iy_2} u dx - \int_{x_1+iy_1}^{x_2+iy_2} v dy + i \left(\int_{x_1+iy_1}^{x_2+iy_2} v dx + \int_{x_1+iy_1}^{x_2+iy_2} u dy \right) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} u [x(s), y(s)] x'(s) ds - \int_{s_1}^{s_2} v y'(s) ds + i \left(\int_{s_1}^{s_2} v x'(s) ds + \int_{s_1}^{s_2} u y'(s) ds \right), \end{aligned}$$

wobei wir $dx = (\partial_s x) ds = x' ds$ verwendet haben und $s_1 = s(z_1) = s(x_1 + iy_1)$ (s_2 entsprechend).

9. Absolute und konvektive Stabilität

4. Falls die Funktion $f(z)$ in der Umgebung eines Punktes a analytisch ist, dann kann sie in eine Laurent-Reihe entwickelt werden

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n. \quad (9.18)$$

Falls $a_n = 0$ für $n < 0$ und $f(a) = a_0$, dann ist $f(z)$ auch analytisch im Punkte a selbst (nicht nur in seiner Umgebung). Die Laurent-Reihe ist in diesem Fall identisch mit der Taylor-Reihe. Andernfalls nennt man den Vorfaktor a_{-1} des Terms mit $n = -1$ das *Residuum* von $f(z)$, $\text{Res}[f(z)]_{z=a} = a_{-1}$.¹⁰

5. Der *Residuen-Satz* besagt: Der Wert des geschlossenen Integrals $\oint f(z) dz$ (wobei der Pfad im positiven mathematischen Sinn zu nehmen ist) um ein Gebiet, das eine endliche Anzahl singulärer Punkte $f(z_j)$ enthält, ist durch die Summe der Residuen gegeben

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}[f(z)]_{z=z_j}, \quad (9.19)$$

wobei man die Residuen an den Stellen z_j folgendermaßen berechnen kann. Es sei $f(z) = \phi(z)/\psi(z)$, wobei $\psi(z)$ eine einfache Nullstelle bei $z_j = a$ besitzt, d.h. $\psi(a) = 0$ und $\psi'(a) \neq 0$, oder es sei $f(z) \sim (z-a)^{-1}$ (einfacher Pol), dann gilt

$$\text{Res} \left[\frac{\phi(z)}{\psi(z)} \right]_{z=a} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}. \quad (9.20)$$

Falls der Pol bei $z_j = a$ nicht einfach ist und von der Ordnung m , d.h. falls $f(z) \sim (z-a)^{-m}$, dann ist das Residuum gegeben durch¹¹

$$\text{Res}[f(z)]_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m]_{z=a}. \quad (9.21)$$

9.4.2. Fourier-Transformation des gestörten linearen Stabilitätsproblems

Wir kommen nun auf die Dispersionsrelation zurück. Ziel ist die Lösung der linearen Problems für kleine Störungen ψ der Grundströmung bei Anwesenheit einer beliebigen von außen aufgeprägten Störung. Wir wollen das Problem durch Fourier-Transformation lösen. Daher schreiben wir die Abweichung vom Grundzustand als eine Superposition von Fourier-Moden, wobei wir im folgenden die Abhängigkeit von den Kontrollparametern μ und U im folgenden nicht explizit aufschreiben,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{L_\omega} \int_{F_k} \psi(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega. \quad (9.22)$$

¹⁰Das Residuum ist eigentlich definiert als $\text{Res}[f(z)]_{z=a} = (2\pi i)^{-1} \oint f(z) dz$. Es ist der Beitrag zum geschlossenen Integral, der übrig bleibt, wenn man den Radius des Pfades um a zu Null schrumpfen läßt.

¹¹Diese Vorschrift filtert den Koeffizienten a_{-1} aus der Laurent-Reihe heraus.

Hierbei ist die Integration entlang bestimmter Wege L_ω und F_k in den komplexen k - und ω -Ebenen durchzuführen. Es ist klar, daß die Realteile von k und ω über den gesamten Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen müssen, da alle Wellenzahlen und Frequenzen repräsentiert sein müssen. Im Prinzip kann man den restlichen Pfad beliebig legen, solange er nicht über irgendwelche Singularitäten von $\psi(k, \omega)$ läuft.

Wesentlich für die Lösung durch Fourier-Transformation ist die Existenz der Fourier-Transformierten von $\psi(x, t)$. Dazu müssen wir sicherstellen, daß das Integral (9.22) existiert und nicht divergiert. Diese Bedingung liefert gewisse Einschränkungen für die Integrationswege für die Rücktransformation (9.22).

1. **Räumliches Verhalten:** Wir nehmen an, daß die Lösung $\psi(x, t)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ wohldefiniert ist. Hier werden wir fordern, daß die Lösung $\psi(x, t)$ exponentiell wie $\sim e^{\mp ax}$ zerfällt, wenn $x \rightarrow \pm\infty$. Diese Bedingung (1) stellt sicher, daß die Fourier-Transformierte

$$\psi(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{-ikx} dx \quad (9.23)$$

nicht nur entlang der reellen Achse von k wohldefiniert ist, sondern auch innerhalb eines endlichen Streifens um die reelle Achse von k herum mit $|\Im(k)| = |k''| < a$. Der exponentielle Zerfall von $\psi(x, t)$ kompensiert das exponentielle Wachstum des Faktors e^{-ikx} für $x \rightarrow +\infty$ (falls k in der oberen Halbebene liegt, $k'' > 0$), oder für $x \rightarrow -\infty$ (falls k in der unteren Halbebene liegt, $k'' < 0$). Siehe auch Abb. 9.5. Deshalb wählen wir den Pfad F_k so, daß er innerhalb dieses Streifens um die reelle k -Achse liegt.¹²

2. **Zeitliches Verhalten:** Da wir hier annehmen, daß die Störung für $t < 0$ verschwindet, müssen wir aus Kausalitätsgründen fordern, daß $\psi(x, t < 0) = 0$ ist. Darüber hinaus nehmen wir an, daß die zeitlichen Wachstumsraten nach oben beschränkt sind, so daß $|\psi(x, t)| < K_0 e^{\gamma t}$ mit $\gamma > 0$ und $K_0 = \text{const.}$, wobei der Exponent γ größer sein muß als die maximale Wachstumsrate aller zeitlichen Moden $\omega_j(k)$. Wenn wir nun einen Integrationspfad mit $\omega'' = \gamma$ wählen, ist die Fourier-Transformierte

$$\psi(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{i\omega t} dt \quad (9.24)$$

für $t \rightarrow +\infty$ wohldefiniert, weil der Betrag des Exponentialfaktors $|e^{i\omega t}| = e^{-\gamma t}$ alle für $t \rightarrow \infty$ exponentiell wachsenden Moden in $\psi(x, t)$ unterdrückt. Für $t < 0$ haben wir kein Konvergenzproblem, da aus Kausalitätsgründen $\psi(x, t < 0) = 0$ (die Störungen S werden erst für $t > 0$ eingeschaltet). Ein geeigneter Integrationspfad L_ω für die Rücktransformation befindet also in der komplexen ω -Ebene oberhalb von $i\gamma$. Beachte, daß die Fourier-Transformierte (9.24) für reelle Werte von ω nicht existiert, wenn die Strömung instabil ist (die instabile Mode divergiert für $t \rightarrow \infty$).

9. Absolute und konvektive Stabilität

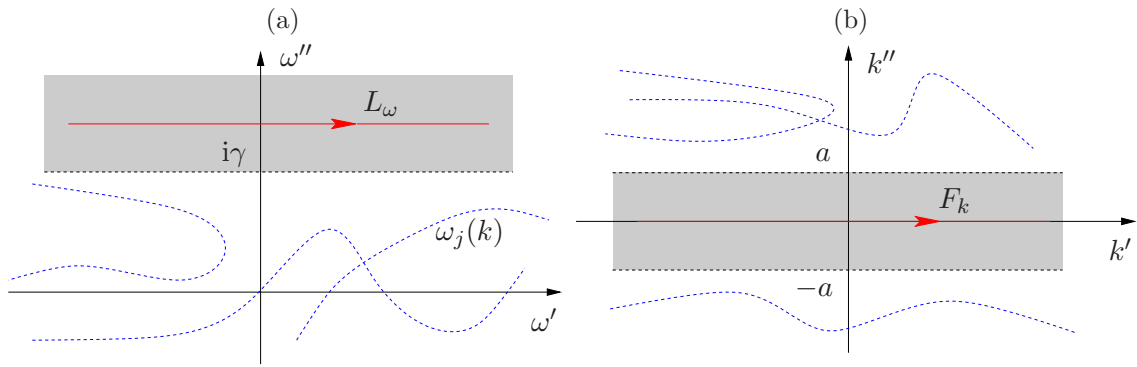


Abbildung 9.5.: Integrationspfade (rot) in den komplexen Ebenen für ω (a) und k (b). Die blauen gestrichelten Linien in (a) bzw. (b) sind die Dispersionsrelationen (Kurven für $D(k, \omega; R) = 0$, die sich ergeben, wenn k bzw. ω entlang der Pfade F_k bzw. L_ω variiert. Die Linien in (a) entsprechen also den Dispersionsrelationen der zeitlichen Moden ($k \in F_k \in \mathbb{R}$ und die gestrichelten Kurven in (b) sind verallgemeinerte räumliche Moden.

Aus den genannten Gründen wählen wir Pfade $C_0 = (F_k, L_\omega)$ so, daß F_k mit der reellen k -Achse zusammenfällt. In der ω -Ebene wählen wir eine Gerade parallel zur reellen ω -Achse, aber oberhalb von γ , d.h. mit $\omega'' > \gamma$; siehe Abb. 9.5. Das heißt, daß der Pfad L_ω oberhalb von allen zeitlichen Zweigen $\omega_j(k)$ liegt während k entlang der reellen Achse variiert.

9.4.3. Formale Lösung der gestörten linearen Stabilitätsprobleme

Wenn der Pfad C_0 die obigen Bedingungen erfüllt, existiert die Fourier-Transformierte und die lineare angetriebene Störungsgleichung $D(-i\partial_x, i\partial_t)\psi(x, t) = S(x, t)$ kann im Fourier-Raum geschrieben werden als

$$D(k, \omega)\psi(k, \omega) = S(k, \omega), \quad (9.25)$$

wobei $S(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, t)e^{-i(kx - \omega t)} dx dt$ die Fourier-Transformierte der Antriebsfunktion $S(x, t)$ ist; $(x, t) \in \mathbb{R}$. Hierbei nehmen wir an, daß die Integrationspfade für die Rücktransformation so gewählt wurden, daß keine Konvergenzprobleme auftreten. Die Dispersionsrelation kann man dann im Fourier-Raum leicht lösen

$$\psi(k, \omega) = \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)}. \quad (9.26)$$

Die Rücktransformation in den physikalischen Raum kann man formal schreiben als

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{C_0} \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega. \quad (9.27)$$

¹²hk: räumliche Moden aus dem Bild nehmen, da sie für die bis hier bekannten Fälle ($\omega \in \mathbb{R}$) nicht ausserhalb des Streifens liegen.

Damit haben wir im Prinzip die Lösung des Problems gefunden. Um weitere Informationen zu erhalten, nehmen wir im folgenden an, daß $D(k, \omega)$ in k und ω analytisch ist, was aber in jedem Einzelfall geprüft werden muß. Für Die GL-Gleichung ist dies der Fall, weil $D(k, \omega)$ ein Polynom in k und ω ist. Die einzig möglichen Singularitäten des Integranden sind die Nullstellen von $D(k, \omega)$. Für unsere Wahl von C_0 stimmt der Pfad F_k mit der reellen k -Achse überein. Deshalb ist $k \in \mathbb{R}$ entlang dem Integrationspfad reell und die Singularitäten, d.h. die Nullstellen von $D(k \in \mathbb{R}, \omega) = 0$ sind gerade durch die zeitlichen Zweige $\omega_j(k)$ gegeben. Diese machen aber keine Probleme, da wir den Integrationspfad L_ω oberhalb aller zeitlichen Zweige gelegt haben.

Wir betrachten nun die Rücktransformation lediglich bezüglich ω . Sie lautet

$$\psi(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega' t} e^{\omega'' t} d\omega. \quad (9.28)$$

Für $t < 0$ kann die Kontur durch einen Halbkreis mit unendlichem Radius in der oberen Halbebene geschlossen werden (für $t < 0$ und $\omega'' \rightarrow +\infty$ verschwindet der Integrand). Da alle Singularitäten unterhalb des Pfades L_ω liegen, werden durch das Schließen des Integrationspfades keine Singularitäten eingeschlossen und wir brauchen keinerlei Residuum berücksichtigen. Deshalb verschwindet das geschlossene Integral mit dem Ergebnis

$$\psi(k, t < 0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_\omega, \text{ upper}} \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = 0. \quad (9.29)$$

Dies ist konsistent mit der Kausalität.

Für $t > 0$ kann der Integrationspfad durch einen unendlichen Halbkreis in der unteren Halbebene geschlossen werden, denn für diese Erweiterung verschwindet wieder der Integrand auf dem unendlichen Halbkreis. Wegen des Residuen-Satzes ist $\psi(k, t)$ durch die Summe der Residuen der eingeschlossenen Singularitäten gegeben. Die Pole sind die zeitlichen Zweige $\omega = \omega_j(k)$ und die Residuen hängen von k ab. Falls es sich um einfach Pole handelt, erhalten wir (siehe Residuen-Satz (9.20) und berücksichtige, daß der Pfad hier im negativen mathematischen Sinn durchlaufen wird)

$$\psi(k, t > 0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_\omega, \text{ lower}} \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = -i \sum_j \frac{S[k, \omega_j(k)] e^{-i\omega_j(k)t}}{\partial D / \partial \omega [k, \omega_j(k)]}. \quad (9.30)$$

Mit Hilfe der Rücktransformation bzgl. k erhalten wir die explizite Lösung

$$\psi(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S[k, \omega_j(k)] e^{i(kx - \omega_j(k)t)}}{\partial D / \partial \omega [k, \omega_j(k)]} dk. \quad (9.31)$$

Wir sehen also, daß die Lösung $\psi(x, t)$ (Störung) als Wellenpaket geschrieben werden kann. Das Wellenpaket besteht aus einer Superposition zeitlicher Moden (auf

dem Pfad F_k ist $k \in \mathbb{R}$), die entsprechend der jeweiligen Amplitude der spektralen Zerlegung des Antriebs $S(k, \omega_j(k))$ gewichtet sind.

Beachte, daß die Untergrenze von L_ω durch $\gamma_{\min} = \omega_{j,\max}'' := \max_{k,j} \{\omega_j''(k)\}$ gebildet wird. Falls der Integrationspfad niedriger verlaufen würde, hätten wir die am schnellsten wachsende Mode in (9.31) nicht berücksichtigt und der Integrationsweg hätte eine Singularität des Integranden S/D in (9.30) gekreuzt.

Aus (9.31) erhalten wir die folgenden Stabilitätseigenschaften:

1. Wenn $\max \omega_j'' < 0$ ist, dann ist der Grundzustand **linear stabil**. Der Integrand zerfällt dann exponentiell. In der Tat ist die Grundströmung asymptotisch stabil.
2. Falls $\max \omega_j'' > 0$ ist, dann ist der Grundzustand **linear instabil**. Es gibt dann einen bestimmten Wert von k , oder sogar ein endliches Band von Wellenzahlen k , wofür der Integrand exponentiell anwächst (siehe Abb. 9.3).
3. Falls $\max \omega_j'' = 0$ ist, dann ist der Grundzustand **neutral stabil**. In diesem Fall benötigt man eine nichtlineare Rechnung, um die Entwicklung der Störung letztendlich zu berechnen.

9.4.4. Verallgemeinerte räumliche und zeitliche Moden

In Kap. 9.3.1 und 9.3.2 hatten wir die zeitlichen und räumlichen Lösungswege durch Fourier-Transformationen bezüglich $k \in \mathbb{R}$ bzw. $\omega \in \mathbb{R}$ untersucht. Diese Analysen würden Integrationswegen entlang den reellen Achsen in der komplexen k - bzw. ω -Ebene entsprechen. A priori kann man nicht sagen, ob diese Moden Sinn machen. Denn wir wissen nicht, ob die jeweiligen Fouriertransformationen definiert sind.

Wie wir in Kap. 9.4.2 gesehen haben, ist C_0 ein möglicher Satz von Integrationspfaden. Dieser Satz von Pfaden ist aber nicht der einzig mögliche. Denn solange die Dispersionsrelation $D(k, \omega) = 0$ analytisch ist (was für die GL-Gleichung erfüllt ist), können wir die Integrationswege kontinuierlich verschieben, ausgehend vom C_0 -Kontur-Paar (F_k, L_ω) . Die Lösung (9.31) wird sich dabei nicht ändern, solange der Integrationsweg keine Singularität von $S(k, \omega)/D(k, \omega)$ kreuzt. Als Ergebnis erhalten wir verallgemeinerten Moden $\omega_j(k)$ bzw. $k_j(\omega)$, wobei nun sowohl k wie auch ω komplex sind. Diese verallgemeinerte Moden haben keine anschauliche Bedeutung, sie sind aber wichtige Objekte, wie wir hoffentlich sehen werden. Dies führt uns zu einer allgemeineren Definitionen von zeitlichen und räumlichen Moden.

- Die **verallgemeinerten räumlichen Zweige** der Dispersionsrelation werden durch diejenigen Werte k gebildet, für welche $D(k, \omega) = 0$ ist und ω entlang dem Pfad L_ω variiert.
- Die **verallgemeinerten zeitlichen Zweige** der Dispersionsrelation werden von denjenigen Werten ω gebildet, für welche $D(k, \omega) = 0$ ist und k entlang dem Pfad F_k variiert.