

# 9. Absolute und konvektive Stabilität

In Kap. 2.4.2 hatten wir die Liapunov Stabilität der Lösung eines dynamischen Systems mit Hilfe Trajektorien im Phasenraum definiert. Danach ist eine Grundströmung  $\mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)$  stabil, falls es für ein beliebiges  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon) > 0$  gibt, so daß

$$\begin{aligned} \text{falls } & \|\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, 0)\| \leq \delta(\epsilon), \\ \Rightarrow & \forall_{t>0} \quad \|\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)\| \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Andernfalls ist die Grundströmung Lyapunov-instabil. Hier ist  $\|\cdot\|$  irgendeine Norm, zum Beispiel die Maximum-Norm  $\|F(\mathbf{x}, t)\| = \max_{\mathbf{x} \in V} F(\mathbf{x}, t)$ . Falls die Strömung stabil ist, können wir also immer eine  $\delta$ -Umgebung der Anfangsbedingungen finden, so daß für anfängliche Störungen innerhalb der  $\delta$ -Umgebung die Abweichungen von der Grundlösung für alle Zeiten kleiner bleiben als ein vorgeschriebener Wert von  $\epsilon$ , egal wie klein wir  $\epsilon$  wählen.

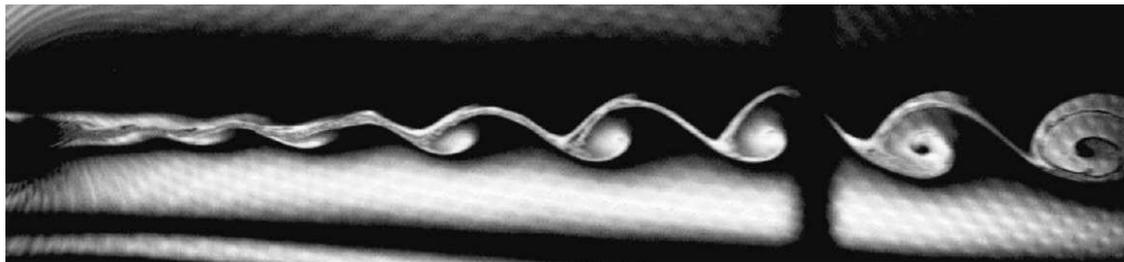
Wenn das System für  $t \rightarrow \infty$  zu dem Grundzustand zurückkehrt, d.h.  $\epsilon = 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)\| &= 0 \\ \text{für } \|\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, 0)\| &\leq \delta, \end{aligned} \quad (9.2)$$

dann ist der Grundzustand asymptotisch stabil. Falls die Bedingung für jedes  $\delta$  gilt, also auch für beliebig starke Anfangsstörungen, dann ist die Grundströmung sogar asymptotisch global stabil. Falls es jedoch eine Schwelle gibt, so daß asymptotische Stabilität nur für  $\delta < \delta_0$  gilt, dann ist die Grundströmung bedingt stabil (siehe auch Kap. 3.3.1).

Im folgenden werden wir uns auf die lineare Stabilität beschränken und betrachten daher nur infinitesimale Störungen der Grundströmung. Wir hatten gesehen, daß ein linear stabiles System auch Liapunov-stabil ist (siehe Kap. 2.4.2). Lineare Stabilität impliziert jedoch nicht globale Stabilität. Die damit verbundenen Probleme hatte wir in Kap. 8 diskutiert.

Im Prinzip müßten wir im folgenden die linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen (6.62) betrachten wie zum Beispiel in Kap. 6.2. Dort hatten wir uns für die zeitliche Entwicklung interessiert. Hier wollen wir die lineare Stabilität aber allgemeiner betrachten, indem wir die gesamte raumzeitliche Entwicklung analysieren. Ein Beispiel, das man nicht direkt mit der zeitlichen Stabilitätsanalyse behandeln kann, ist



**Abbildung 9.1.:** Räumlich Entwicklung einer Scherschicht am Beispiel eines Interferenzmusters der Strömung in einem Seifenfilm-Kanal (nach [Bocanegra-Evans and Allen, 2005](#)). Die Dicke des Seifenfilms ist ein Maß für die Vortizität ([Chomaz and Cathalau, 1990](#)).

in Abb. 9.1 gezeigt. Hier wächst die Amplitude nicht zeitlich an, sondern räumlich in eine ganz bestimmte Richtung (stromabwärts).<sup>1</sup>

Da die allgemeine Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen jedoch recht kompliziert ist, sollen die grundlegenden Konzept an dem Modell der eindimensionalen komplexen Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_t \psi + U \partial_x \psi = \mu \psi + \partial_{xx} \psi - |\psi|^2 \psi \quad (9.3)$$

demonstriert werden. Viele Bifurkationsprobleme der Strömungsmechanik können mit Hilfe der Ginzburg-Landau-Gleichung approximiert werden.<sup>2</sup> Dabei beschreibt die GL-Gleichung die schwach nichtlineare Dynamik von Abweichungen von der Grundlösung (Grundströmung) in der Nähe von Verzweigungen, also in der Nähe der kritischen Reynoldszahl. Dabei werden die nichtlinearen Terme nur bis zur führenden Ordnung berücksichtigt. In der Ginzburg-Landau-Gleichung ist die Abweichung vom Grundzustand  $\psi_0(x, t) = 0$  ein Skalar und wird mit  $\psi(x, t)$  bezeichnet. Anstelle der Reynoldszahl  $Re$ , tritt ein Kontrollparameter  $\mu \in \mathbb{R}$  auf (und der Parameter  $U \in \mathbb{R}$ ), den man auch als reduzierte Reynoldszahl bezeichnen kann. Es ist leicht, den advektiven, diffusiven und den nichtlinearen Term in der Gleichung zu identifizieren.

Das ganze Kapitel basiert sehr stark auf der Arbeit von [Huerre and Rossi \(1998\)](#).

## 9.1. Lineare Stabilität

Für die Analyse der linearen Stabilität wird der Term  $|\psi|^2 \psi$  vernachlässigt. Wir erhalten dann

$$\partial_t \psi - \underbrace{(-U \partial_x + \mu + \partial_{xx})}_L \psi = \partial_t \psi - L(\partial_x, \mu, U) \psi = 0. \quad (9.4)$$

<sup>1</sup>hk: Kommt Gaster-Transformation irgendwo?

<sup>2</sup>Die erste Ableitung der GL-Gleichung für das Rayleigh-Bénard-Problem wurde von [Newell and Whitehead \(1969\)](#) und [Segel \(1969\)](#) gegeben. Auch für das Taylor-Couette-System wurden Amplitudengleichungen abgeleitet ([Graham and Domaradzki, 1982](#)). Für einen Überblick über die Musterbildung im Rahmen von Amplitudengleichungen, siehe [Cross and Hohenberg \(1993\)](#).

Die Symmetrien des Systems werden von dem linearen Operator  $L$  widergespiegelt. Falls die Grundströmung stationär ist, ist  $L$  homogen in der Zeit (d.h.,  $L$  hängt nicht explizit von der Zeit ab, Zeitableitungen können jedoch auftreten). Falls die Strömung parallel ist, dann ist  $L$  homogen in  $x$  (d.h.,  $L$  hängt nicht explizit von  $x$  ab, aber Ortsableitungen bzgl.  $x$  können auftreten). In diesen Fällen sind die Gleichungen invariant unter beliebigen Translationen der Zeit ( $t \rightarrow t + t_0$ ) oder des Ortes ( $x \rightarrow x + x_0$ ). Falls die Grundströmung homogen in der Zeit im Ort oder in beiden ist, kann man die Fourier-Laplace-Transformation nutzen, um das Problem zu vereinfachen.

## 9.2. Einige grundlegende Definitionen

In der linearisierten GL-Gleichung (9.3) ist die Grundlösung  $\psi_0 = 0$  homogen in Zeit  $t$  und Raum  $x$ . Mit  $D = \partial_t - L$  können wir die Gleichung (9.4) für kleine Abweichungen  $\psi(x, t)$  in der Form schreiben

$$D(-i\partial_x, i\partial_t; R)\psi = 0, \quad \text{mit} \quad D = \partial_t - L = \partial_t + U\partial_x - \mu - \partial_{xx}, \quad (9.5)$$

wobei  $R$  den Satz der Kontrollparameter  $\mu$  und  $U$  bezeichnen soll. Die Entwicklung der Lösung hängt entscheidend von der Art der Störungen ab. Deshalb werden wir nun eine additive Störung  $S(x, t)$  aufprägen. Bei Anwesenheit dieser Störung müssen wir die angetriebene Gleichung

$$D(-i\partial_x, i\partial_t; R)\psi(x, t) = S(x, t) \quad (9.6)$$

betrachten. Hierbei ist es wichtig, das Kausalitätsprinzip zu beachten: *Für eine Störung, die bei  $t = 0$  eingeschaltet wird, muß die Antwort des Systems für  $t < 0$  verschwinden, d.h.  $\psi(x, t < 0) \equiv 0$ .*

Im folgenden werden wir 3 verschiedene Arten des Antriebs betrachten

1.  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\delta(t)$ : Ein Störimpuls wirkt im ganzen Raum nur zur Zeit  $t = 0$ ,  $\rightarrow$  Anfangswertproblem),
2.  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$ : Ein lokalisierter Störimpuls bei  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$ . Dann ist  $\psi$  die *Greensche Funktion* des Problems, mit der man Lösungen für allgemeinere Störungen konstruieren kann, und
3.  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\theta(t)e^{-i\omega t}$ : Dies ist das Signalproblem (*signaling problem*):  $\psi$  ist die Antwort auf eine bei  $x = 0$  lokalisierte oszillierende Störung, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltet wurde).

Hierbei ist  $\delta(t)$  die Diracsche Deltafunktion und  $\theta(t)$  Stufenfunktion von Heaviside.

Falls wir die Greensche Funktion  $G(x, t)$  als Lösung von  $D(-i\partial_x, i\partial_t; R)G(x, t) = \delta(x)\delta(t)$  kennen, dann können wir die Lösung von  $D(-i\partial_x, i\partial_t; R)\psi(x, t) = S(x, t)$

## 9. Absolute und konvektive Stabilität

für beliebigen Antrieb  $S(x, t)$  im Prinzip als Faltungsintegral von  $S(x, t)$  mit  $G(x, t)$  berechnen,<sup>3</sup> d.h.

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x', t') G(x - x', t - t') dx' dt'. \quad (9.7)$$

Wir betrachten nun eine in Raum und Zeit lokalisierte Störung. Falls die Störung die Form  $\delta(x)\delta(t)$  hat, sind drei Szenarien möglich:

1.  **$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$  für alle  $x/t = \text{const.}$ :** Die Greensche Funktion verschwindet entlang allen Strahlen; die Amplitude zerfällt asymptotisch in Zeit und Raum und der Grundzustand ist **linear stabil**,
2.  **$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty$  für wenigstens einem Strahl  $x/t = \text{const.}$ :** Die Greensche Funktion divergiert wenigstens entlang einem Strahl; die Amplitude explodiert und der Grundzustand ist **linear instabil**. Für diesen Fall werden zwei Unterklassen definiert:

---

<sup>3</sup>Dies kann man folgendermaßen sehen. Offenbar ist

$$\begin{aligned} D(-i\partial_x, i\partial_t; R)\psi(x, t) &= S(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - x', t - t') \delta(x') \delta(t') dx' dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - x', t - t') D(-i\partial_{x'}, i\partial_{t'}; R) G(x', t') dx' dt' \\ &\stackrel{(a)}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} [D(-i\partial_{x'}, i\partial_{t'}; R) S(x - x', t - t')] G(x', t') dx' dt' \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} [D(-i\partial_x, i\partial_t, R) S(x - x', t - t')] G(x', t') dx' dt' \\ &= D(-i\partial_x, i\partial_t; R) \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - x', t - t') G(x', t') dx' dt'. \end{aligned}$$

Für die partielle Integration in (a) haben wir angenommen, daß  $D$  nur ungerade Ableitungen enthält. Für gerade Ableitungen gibt es keine Änderung des Vorzeichens bei der geradzahligem partiellen Integration. Aber auch bei der Abwälzung der Ableitungen von den gestrichenen zu den ungestrichenen Variablen im Schritt (b) tritt dann kein Vorzeichenwechsel auf. Deshalb erhält man dasselbe Vorzeichen unabhängig von der Ordnung der jeweiligen Ableitung. Indem wir partiell integriert haben, haben wir angenommen, daß der Antrieb  $S$  und eine gewisse Anzahl seiner Ableitungen für  $x \rightarrow \pm\infty$  und  $t \rightarrow \pm\infty$  verschwinden. Diese Erklärung muß für den Moment genügen. Es folgt

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - x', t - t') G(x', t') dx' dt',$$

oder, mit Transformation der Integrationsvariablen  $x' \rightarrow x - x'$  und  $t' \rightarrow t - t'$

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x', t') G(x - x', t - t') dx' dt'.$$

- a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$  für  $x/t = 0$ : Die Amplitude wächst stromabwärts. Am Punkt  $x = 0$ , an dem die Störung initiiert wurde, zerfällt sie zu Null. Die Strömung ist dann **linear konvektiv instabil**. Die Amplitude wird letztendlich an jedem festen Punkt  $x$  zerfallen, obwohl sie anwächst, während sie stromabwärts transportiert wird.
- b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty$  entlang  $x/t = 0$ : Die Amplitude wächst auch am Punkt  $x = 0$ , an dem sie initiiert wurde, über alle Grenzen. Die Störung wächst an allen Orten  $x$  an, auch stromaufwärts. Der Grundzustand ist dann **linear absolut instabil**.

Diese Definitionen hängen davon ab, welches Bezugssystem man wählt. Aber die uns interessierenden Problem wie Mischungsschichten und ebene Poiseuille-Strömung sind nicht Galilei-invariant und wir können das Bezugssystem nicht frei wählen.<sup>4</sup>

Abbildung 9.2 zeigt die typische zeitliche Entwicklung der Amplitude von Störungen, die konvektiv (a) oder absolut instabil sind (b).

<sup>4</sup>Beachte, daß die Navier-Stokes-Gleichungen selbst Galilei-invariant sind. Wenn wir die Gleichungen in ein Bezugssystem transformieren, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$  bewegt, dann ist  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{V}$ . Die transformierten Koordinaten lauten

$$t' = t \quad \text{und} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t.$$

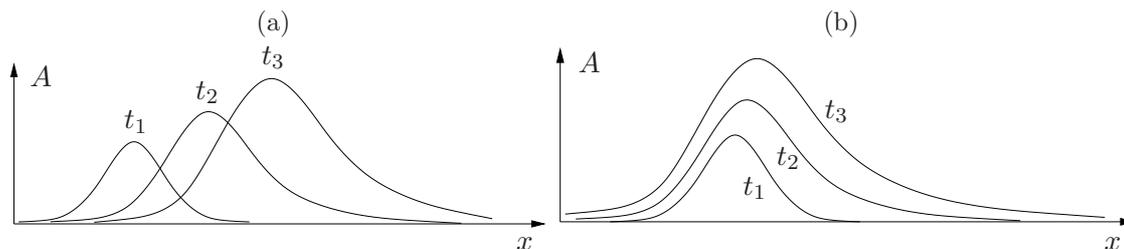
Mittels Kettenregel ergibt sich für die transformierten Ableitungsoperatoren

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x_j} = \underbrace{\left(\frac{\partial t'}{\partial x_j}\right)}_{=0} \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right)}_{=I} \frac{\partial}{\partial x'_i} = \nabla', \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \underbrace{\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)}_{=1} \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\left(\frac{\partial x'_i}{\partial t}\right)}_{=-V_i} \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{V} \cdot \nabla'. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Navier-Stokes-Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_{t'} \mathbf{u} - \mathbf{V} \cdot \nabla' \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla' \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla' p + \nu \nabla'^2 \mathbf{u}, \\ \partial_{t'} \mathbf{u}' - \mathbf{V} \cdot \nabla' \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' + \mathbf{V} \cdot \nabla' \mathbf{u}' &= -\frac{1}{\rho} \nabla' p' + \nu \nabla'^2 \mathbf{u}', \\ \partial_{t'} \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' &= -\frac{1}{\rho} \nabla' p' + \nu \nabla'^2 \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

Auch die Kontinuitätsgleichung ändert sich nicht. Aber die Randbedingungen, auf denen die Geschwindigkeit vorgeschrieben ist, sind nicht invariant. Zum Beispiel transformieren sich feste Randbedingungen  $\mathbf{u} = 0$  nach  $\mathbf{u}' = -\mathbf{V}$ , so daß das gesamte Problem nicht invariant unter Galilei-Transformationen ist.



**Abbildung 9.2.:** Typische Entwicklung der Amplitude  $A(x, t)$  für Zeitpunkte  $t_1 < t_2 < t_3$  einer Störung, die konvektiv (a) oder absolut instabil ist (b).

### 9.3. Dispersionsrelationen für reelle Wellenzahlen und Frequenzen

Wir werden nun Lösungen der linearisierten GL-Gleichung ohne Antrieb (9.4) suchen, um zu entscheiden, ob die Grundströmung stabil, konvektiv stabil, konvektiv instabil oder absolut instabil ist.

#### 9.3.1. Zeitliche Stabilität

Da der Operator  $D$  homogen in Raum  $x$  und Zeit  $t$  ist (zum Beispiel bei der ebenen Poiseuille-Strömung), können wir Normalmoden in der bekannten Form suchen und setzen also an

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}. \tag{9.8}$$

Eingesetzt in die linearisierte GL-Gleichung (9.4) stellen wir fest, daß dies äquivalent dazu ist,  $\partial_x$  durch  $ik$  und  $\partial_t$  durch  $-\omega$  zu ersetzen. Als Ergebnis erhalten wir eine algebraische Gleichung, welche die Beziehung zwischen  $k$  und  $\omega$  festlegt. Dies ist die Dispersionsrelation

$$D(k, \omega; R) = 0. \tag{9.9}$$

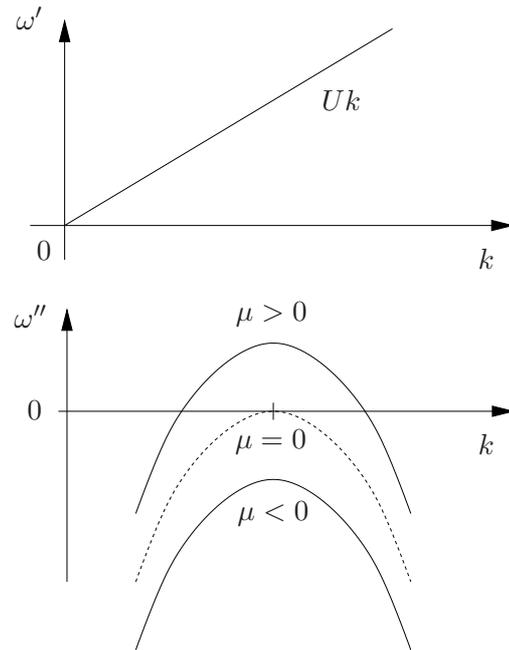
Genau genommen, erhalten wir aus der Ginzburg-Landau-Gleichung (9.4)

$$D(k, \omega; \mu, U) = -i\omega + iUk - (\mu - k^2) = 0. \tag{9.10}$$

Es ist wichtig zu beachten, daß im allgemeinen sowohl  $\omega$  als auch  $k$  komplex sein können. Für geschlossene Systeme wird normalerweise  $k \in \mathbb{R}$  reell gewählt. Falls wir diese Annahme hier treffen, sind die Lösungen<sup>5</sup>  $\omega_j$  der Dispersionsrelation (durch  $j$  nummeriert) normalerweise komplex,  $\omega_j = \omega'_j + i\omega''_j$ , wobei der Strich den Real- und der Doppelstrich den Imaginärteil bezeichnen. In unserem einfachen Modellproblem erhalten wir nur eine einzige Lösung

$$\omega(k; \mu, U) = \underbrace{Uk}_{\omega'} + i \underbrace{(\mu - k^2)}_{\omega''}. \tag{9.11}$$

<sup>5</sup>Für etwas kompliziertere Probleme können unendlich viele aber diskrete Lösungen der Dispersionsgleichung existieren.



**Abbildung 9.3.:** Dispersionsrelation für die linearisierte GL-Gleichung und  $k \in \mathbb{R}$  reell. Nur eine einzige Lösung existiert.

Die Bedeutung dieses Resultats ist die folgende: Nicht-angetriebene Wellen mit Wellenzahl  $k$  propagieren mit der Phasengeschwindigkeit  $\omega'/k = U$  und wachsen exponentiell in der Zeit mit der Wachstumsrate  $\omega'' = \mu - k^2$  an.

Die Stabilität des Grundzustands erhalten wir folgendermaßen. Falls es eine Lösung gibt mit  $\omega'' > 0$ , dann ist der Grundzustand linear instabil, da es dann mindestens eine Wellenzahl gibt, für welche eine entsprechende Störung verstärkt wird. Hier haben wir  $\omega''(k; \mu, U) = \mu - k^2$  und der Grundzustand ist instabil für  $\mu > 0$  (siehe Abb. 9.3). Falls  $\mu < 0$  ist, sind alle Moden gedämpft und der Grundzustand ist linear stabil.

Die Bedingung für ein Verschwinden der Wachstumsrate lautet  $\omega'' = 0$ . Falls wir  $N$  Variablen haben, die räumlichen Variablen (Wellenzahlen) und die Kontrollparameter, symbolisiert durch  $(\mathbf{k}, R)$ , dann spannen sie einen  $N$ -dimensionalen Parameter-Raum auf. Die Bedingung  $\omega''(\mathbf{k}; R) = 0$  definiert dann eine  $(N - 1)$ -dimensionale Hyperfläche in diesem Parameter-Raum. Diese Fläche nennt man *neutrale* Fläche. Weil wir im allgemeinen mehrere oder sogar unendlich viele zeitliche Moden  $\omega_j(\mathbf{k}; R)$  haben, können viele derartige Hyperflächen existieren. Die Einhüllende aller neutralen Hyperflächen wird dann die *kritische* Fläche genannt.

Im vorliegenden Beispiel haben wir nur eine neutrale Fläche  $\omega'' = 0$ . Sie ist daher identisch mit der kritischen Fläche. Sie ist hier zweidimensional und durch  $\mu = k^2$  gegeben, unabhängig von  $U$ .

### 9.3.2. Räumliche Stabilität

Man muß aber nicht unbedingt  $k \in \mathbb{R}$  reell wählen. Man kann auch  $\omega \in \mathbb{R}$  reell wählen und Lösungen der Dispersionsgleichung (9.10) suchen. Dann erhalten wir komplexe Wellenzahlen  $k_j(\omega; R) = k'_j + ik''_j$ . Die entsprechenden Moden werden

**räumliche Moden** genannt. Es sind Wellen, die harmonisch in der Zeit sind. Sie haben die Wellenlänge  $\lambda_j = 2\pi/k'_j(\omega; R)$  und besitzen die räumliche Wachstumsrate  $-k''_j(\omega; R)$ .

Für unser Beispiel der GL-Gleichung erhalten wir durch Lösen der quadratischen Gleichung (9.10) für  $k$

$$k^2 + iUk + \left(\frac{iU}{2}\right)^2 = \mu + i\omega + \left(\frac{iU}{2}\right)^2, \quad (9.12)$$

$$\Rightarrow k_{\pm}(\omega; \mu, U) = -\frac{iU}{2} \pm \sqrt{\mu + i\omega + \left(\frac{iU}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left[ -iU \pm \sqrt{4(\mu + i\omega) - U^2} \right].$$

Um zu sehen, wie sich diese Zweige entwickeln, betrachten wir  $\mu = 0$  und kleine Frequenzen  $\omega \ll U^2$ .<sup>6</sup> Wir erhalten

$$\begin{aligned} k_{\pm}(\omega; \mu = 0, U) &= \frac{1}{2} \left[ -iU \pm \sqrt{4i\omega - U^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ -iU \pm \sqrt{-U^2} \sqrt{1 - \frac{4i\omega}{U^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -iU \pm iU \left( 1 - \frac{2i\omega}{U^2} + \frac{2\omega^2}{U^4} + O(\omega^3) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -iU \pm \left( iU + \frac{2\omega}{U} + \frac{2i\omega^2}{U^3} + O(\omega^3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Wir erhalten also für die Wellenzahlen (Realteil von  $k_{\pm}$ )

$$k'_{\pm} = \pm \frac{\omega}{U} + O(\omega^3), \quad (9.14a)$$

und für die räumlichen Wachstumsraten (Imaginärteil von  $k_{\pm}$ )

$$-k''_+ = -\frac{\omega^2}{U^3} + O(\omega^4), \quad (9.14b)$$

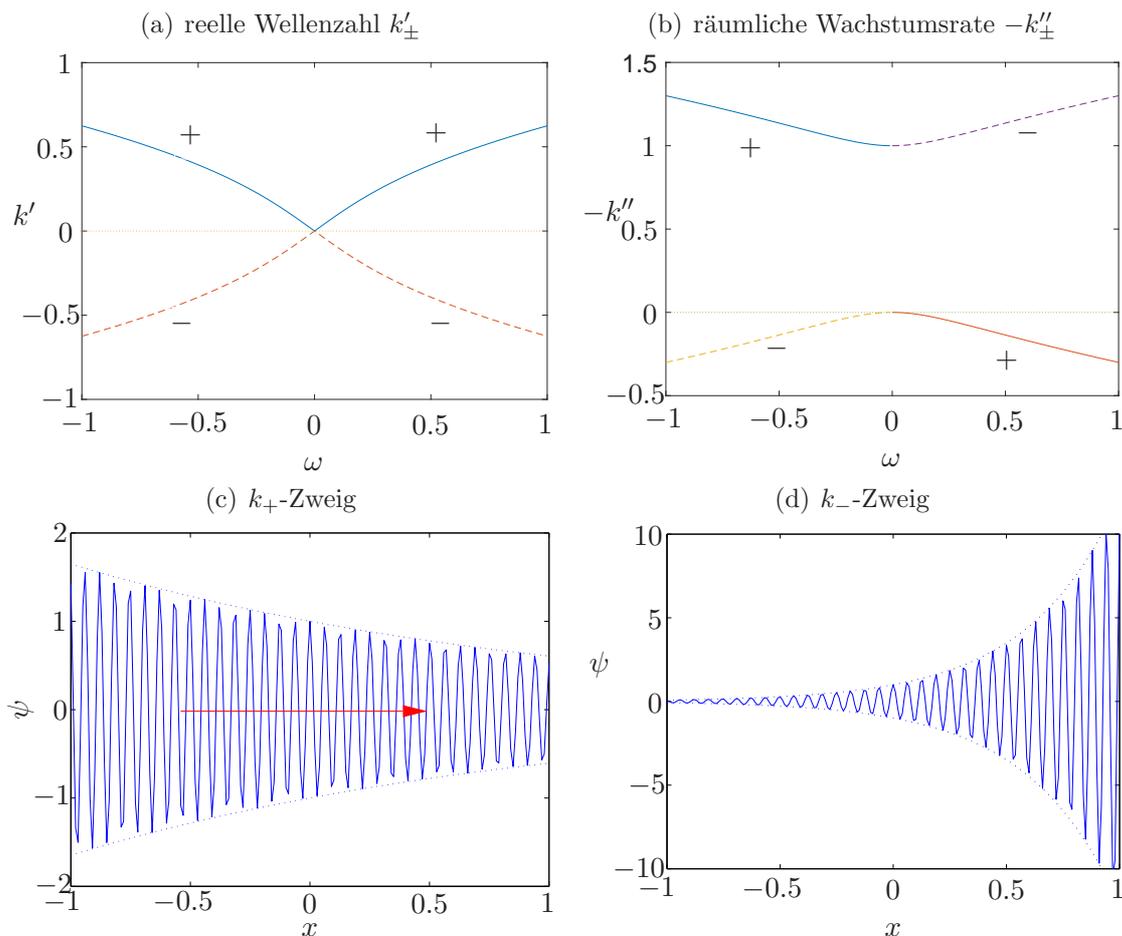
$$-k''_- = U + \frac{\omega^2}{U^3} + O(\omega^4). \quad (9.14c)$$

Was bedeutet dies nun? Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir  $\omega > 0$ . Dann entspricht die Lösung  $k_+$  einer Welle, die in positive  $x$ -Richtung ( $k'_+ > 0$ ) propagiert, während  $k_-$  einer Welle entspricht, die in negative  $x$ -Richtung propagiert ( $k'_- < 0$ ). Da die räumlichen Wachstumsraten in  $x$ -Richtung  $-k''_+ \lesssim 0$  und  $-k''_- > 0$  sind, ist die  $k_+$ -Mode in  $x$ -Richtung schwach gedämpft, während die  $k_-$ -Mode in  $x$ -Richtung stark angefacht ist. Dies ist in Abb. 9.4 illustriert. Beachte, daß die Einhüllende stationär bleibt (die Frequenz hatten wir ja reell gewählt). Die Wellen propagieren unter der stationären Einhüllenden in positive ( $k_+$ ) und negative  $x$ -Richtung ( $k_-$ ).

Wenn  $\mu$  von Null in positiver Richtung anwächst, dann schneidet der Imaginärteil des  $k_+$ -Zweigs die  $\omega$ -Achse bei  $\omega = 0$  und beide Zweige,  $k_+$  und  $k_-$ , tendieren dazu,

<sup>6</sup>Dann können wir die Wurzel  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$  entwickeln.

### 9.3. Dispersionsrelationen für reelle Wellenzahlen und Frequenzen



**Abbildung 9.4.:** Dispersionsrelation für die linearisierte GL-Gleichung bei reeller Frequenz  $\omega \in \mathbb{R}$  und für  $\mu = 0$  und  $U = 1$ . (a) Wellenzahl  $k'$ , (b) Dämpfungsrate  $k''$ . (c,d) Qualitatives Verhalten der beiden Lösungen:  $k_+$ -Zweig (c) und  $k_-$ -Zweig (d). Der rote Pfeil gibt die Propagationsrichtung der Welle an. Beachte, daß die Einhüllende stationär bleibt. In Wirklichkeit sind die Verstärkungsfaktoren für die GL-Gleichung vom Betrag her wesentlich höher, so daß man auf der gezeigten Längenskala das Verhalten nicht so gut erkennen kann. Die  $+/-$  Markierungen in Abb. 3.5 und 3.6 von [Huerre and Rossi \(1998\)](#) sind nicht korrekt.

bei  $\omega = 0$  zu verschmelzen (Abb. 9.4b). In diesem Bereich von  $\mu > 0$  und für einen Bereich niedriger Frequenzen um  $\omega = 0$  wechselt die  $k_+$ -Mode von einer gedämpften Welle in eine schwach verstärkte Welle.

Ein besonderes Verhalten kann man für  $\mu > U^2/4$  finden. In diesem Fall gibt es einen Bereich reeller Wellenzahlen  $k'$  um  $k' = 0$  herum, für den keine räumliche Mode existiert! Dieses Verhalten werden wir aber erst später erklären.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Man kann sich die Lücke in  $k'$  folgendermaßen klar machen. Mit  $a = \mu - U^2/4 > 0$  ist nach