Das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung des Stagnationspunktes lautet

$$\boldsymbol{U} = \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{\lambda}{\mu} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}_2 - \lambda \mu \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}_3, \tag{5.47}$$

wobei $\mu \leq 1$ die Elliptizität (Exzentrizität) der Stromlinien in der Nähe des Stagnationspunkts beschreibt. In dem hier betrachteten Fall sind die Stromlinien Ellipsen, die in Ebenen senkrecht zu $\boldsymbol{e}_1$ liegen. Der Fall $\mu = 1$ entspricht einer reinen Festkörperrotation (zirkulare Stromlinien). In diesem Grenzfall wird $\mathcal{L}$ antisymmetrisch.

Durch Skalierung der Zeit (und damit $\boldsymbol{U}$), kann man $\lambda = 1$ setzen und erhält dann

$$\mathcal{L} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}_2 - \mu \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}_3. \tag{5.48}$$

Da wir die elliptische Instabilität schon in Abschnitt 4.8.3 behandelt haben, sei an dieser Stelle lediglich auf die Originalarbeit von Lifschitz and Hameiri (1991) verwiesen, die das Problem mittels Floquet-Ansatz gelöst haben.

5.2.5. Einfluß der Viskosität

Wie in 5.1 angedeutet wurde, kann man im Rahmen der WKB-Näherung nicht einfach die Viskosität unabhängig von ϵ berücksichtigen. Es ist jedoch möglich, den Fall schwacher Viskosität zu betrachten. Dazu nimmt man an, daß

$$\nu = \tilde{\nu} \epsilon^2. \tag{5.49}$$

Mit einer Längenskala $L = O(\epsilon/k)$ (siehe (5.4)) und für kleine Amplituden der Störung $\boldsymbol{a} = O(\epsilon)$ entspricht dies der Bedingung, daß die Reynoldszahl $\mathrm{Re} = aL/\nu = O(1)$ sein muß. Man kann dann leicht nachrechnen, daß in Gleichung (5.16c) für die Amplitude nur der zusätzliche Summand $-\tilde{\nu} k^2 \boldsymbol{a}$ auftaucht (Lifschitz, 1991),

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = -\left(\mathcal{I} - 2\frac{\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) \cdot \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{a} - \tilde{\nu} k^2 \boldsymbol{a}. \tag{5.50}$$

Wenn man diesen Term durch die Transformation

$$\boldsymbol{a}(t) = \tilde{\boldsymbol{a}}(t) \exp\left(-\tilde{\nu} \int_{t_0}^{t} k^2 \mathrm{d}\tau\right) \tag{5.51}$$

eliminiert, ergibt sich wieder die Amplitudengleichung (5.16c), jetzt nur für $\tilde{\boldsymbol{a}}$.[21] In Analogie zu (5.17) erhält man mit den zugrundeliegenden Betrachtungen von

[21] Beachte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0}^{t} k^2(\tau) \mathrm{d}\tau = k^2(t).$$

Lifschitz and Hameiri (1991) über die Stabilität der Grundströmung dann[22]

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{a}_0\\ |\boldsymbol{k}_0|=1,|\boldsymbol{a}_0|=1,\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{a}_0=0}} \left[\lim_{t\to\infty} \exp\left(-\tilde{\nu}\int_{t_0}^{t} k^2(t;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{k}_0)\mathrm{d}\tau\right)|\tilde{\boldsymbol{a}}(t;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{a}_0)|\right] = \infty. \tag{5.52}$$

Das heißt, das Wachstum der Amplitude $\tilde{\boldsymbol{a}}$ muß den exponentiellen Dämpfungsterm überkompensieren. Dies ist eine hinreichende Bedingung für die lokale nichtlineare[23] Instabilität.

Aus dem Ergebnis kann man folgende Schlußfolgerungen ziehen. Instabilitäten reibungsfreier Strömungen können für gewisse Werte von ϵ (Maß für die Wellenlänge der Störung) durch die Viskosität unterdrückt werden. Sie können für andere Werte von ϵ jedoch instabil bleiben. Nur falls k für alle Störungen hinreichend schnell in der Zeit anwächst (siehe (5.52)), kann eine ideale Instabilität vollständig unterdrückt werden. Damit kann man zeigen, daß Strömungen mit hyperbolischem oder elliptischem Stagnationspunkt im Limes schwacher Viskosität instabil sind. Da die Instabilität der reibungsfreien Scherströmung nur algebraisch ist, wird diese ideale Instabilität von jeder noch so schwachen Viskosität durch die exponentielle Dämpfung eliminiert.

Schlußfolgerung: Alle reibungsfreien Strömungen, die einen regulären Stagnationspunkt besitzen, sind instabil, falls die Stagnationspunkte nicht auf der Achse einer Festkörperrotation liegen.

Man kann auch allgemeine dreidimensionale Grundströmungen mittels lokaler Stabilitätsanalyse untersuchen. Dazu muß man die Stabilitätsgleichungen (5.16a)–(5.16c) entlang aller Stromlinien integrieren. Für jede Stromlinie muß man darüber hinaus alle erlaubten Orientierungen von $\boldsymbol{k}_0$ und $\boldsymbol{a}_0$ untersuchen. Dies wurde in den vergangenen Jahren schon für einige einfache Wirbelströmungen gemacht. So haben zum Beispiel Sipp and Jacquin (1998) die lokale Stabilität der Taylor-Green-Wirbel (3.25) berechnet.[24] Ein Vorteil der lokalen Analyse besteht darin, daß man die *instabilste Stromlinie* identifizieren kann. Dadurch lassen sich die Mechanismen der Instabilität oft leichter erkennen. So sind zum Beispiel deformierte Taylor-Green-Wirbel (3.25) mit $b_x \neq b_y$ instabil sowohl bzgl. der elliptischen wie auch der hyperbolischen Instabilität.

[22] Bei Lifschitz (1991) taucht noch ein Faktor $|k|$ auf, da dort Instabilitätsbedingungen für die Vortizität betrachtet wurden und nicht, wie hier, für das Geschwindigkeitsfeld.

[23] Lifschitz (1991) hat gezeigt, daß die nichtlineare Eulergleichung im Limes kleiner Wellenlängen ($k \to \infty$) linear wird.

[24] Siehe auch Sipp et al. (1999) und Sipp and Jacquin (2000).