

Abbildung 5.1.: Schematische Darstellung einer instabilen lokalen Mode für eine reine Dehnströmung mit $\Omega = 0$. O.B.d.A. wurde $\lambda_2 = 0$ gewählt.

Mit $\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_3 \perp \mathbf{k}_0$ ist in dieser Gleichung

$$\mathcal{L} \cdot \mathbf{a}_0 = \lambda_3 \mathbf{e}_3. \quad (5.31)$$

Damit bleibt aber die Amplitude immer in \mathbf{e}_3 -Richtung polarisiert, und wir erhalten aus (5.30)

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\lambda_3 \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{e}_3 \exp(-\lambda_3 t). \quad (5.32)$$

Mit unserer Wahl $\lambda_3 < 0$ (s.o.) ist daher die reine lineare Dehnströmung **exponentiell instabil**. Die Polarisation der instabilen Störung ist senkrecht zur Richtung der größten positiven Dehnung. Dies ist in Abb. 5.1 schematisch dargestellt.¹³ Beachte, daß man in (5.28) auch hätte $\mathbf{k}_0 = \mathbf{e}_2$ wählen können. In diesem Fall bliebe $\mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \exp(-\lambda_2 t)$ und eine Polarisation in \mathbf{e}_3 -Richtung hätte dann auch zur Instabilität geführt.¹⁴

Um eine reine Dehnströmung zu erzeugen, bedient man sich häufig einer sogenannten Vier-Rollen-Mühle (Abb. 5.2). Im Zentrum einer 4-Rollen-Mühle kann man bei geeigneter Rotation der Rollen in guter Näherung eine ebene Dehnströmung mit $\lambda_2 = 0$ realisieren (z -Richtung in Abb. 5.2). In einer viskosen Strömung ist die Dehnströmung bei kleinen Reynoldszahlen stabil (Abb. 5.3a). Bei Erhöhung von Re tritt eine Instabilität auf, die zu dem in Abb. 5.3b gezeigten Muster führt. Abb. 5.3c zeigt das Muster bei einer noch höheren Reynoldszahl. In Abb. 5.3 ist offenbar eine Mode realisiert, die der Anfangsbedingung $\mathbf{k} = \mathbf{e}_2$ entspricht. Mit $\lambda_2 \approx 0$ (keine Dehnung in \mathbf{e}_2 -Richtung, z -Richtung in Abb. 5.2) ändert sich

¹³Anschaulich kann man sich die Instabilität folgendermaßen klarmachen. Für $x_1 = \text{const.}$ wird Störimpuls u_3 durch die 3-Komponente der Grundströmung U_3 sowohl von $+\infty$ als auch von $-\infty$ nach $x_3 = 0$ transportiert. Dadurch wächst die Störampplitude $\mathbf{a} = a(t)\mathbf{e}_3$ exponentiell an. Mathematisch wird dies beschrieben durch den Wechselwirkungsterm $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{U} = a \partial_3 \mathbf{U} = a \lambda_3 \mathbf{e}_3$ (beachte: $\mathbf{U} = \lambda_3 x_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_1 x_1 \mathbf{e}_1$ mit $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_3 < 0$). Mit $\partial_t \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{U} + \dots$ ergibt dies eine exponentielle Verstärkung der Störung. Beachte, daß der Wechselwirkungsterm $\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{a}$ energieerhaltend ist (siehe (3.44)).

¹⁴Der Fall $\lambda_2 \leq 0$ ist in gewisser Hinsicht unproblematischer als der Fall $\lambda_2 > 0$. Denn für $\lambda_2 > 0$ liefert die Gleichung (5.29) für $\mathbf{k}(t)$ eine verschwindende Wellenzahl $\mathbf{k} \rightarrow 0$. Dies führt dazu, daß im Limes $t \rightarrow \infty$ die Annahme einer schnell variierenden Phase zusammenbricht, da die Wellenlänge immer größer wird: $e^{i\Phi/\epsilon} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/\epsilon} \rightarrow e^{i \times 0}$.

5. Lokale Stabilitätsanalyse

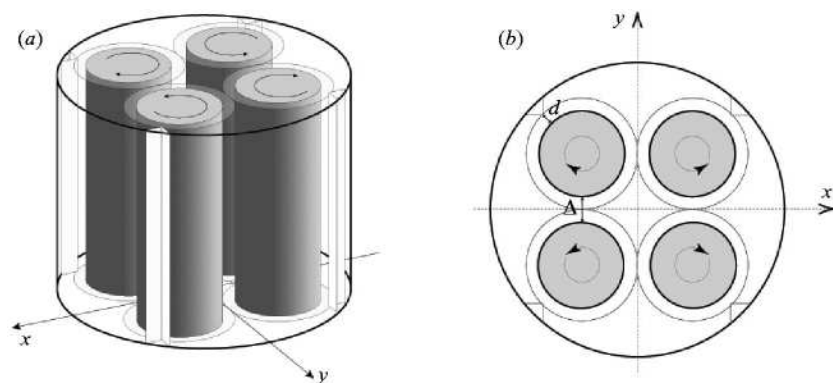


Abbildung 5.2.: Schematische Darstellung einer Taylorschen 4-Rollen-Mühle (Taylor, 1934) nach Andreotti et al. (2001).

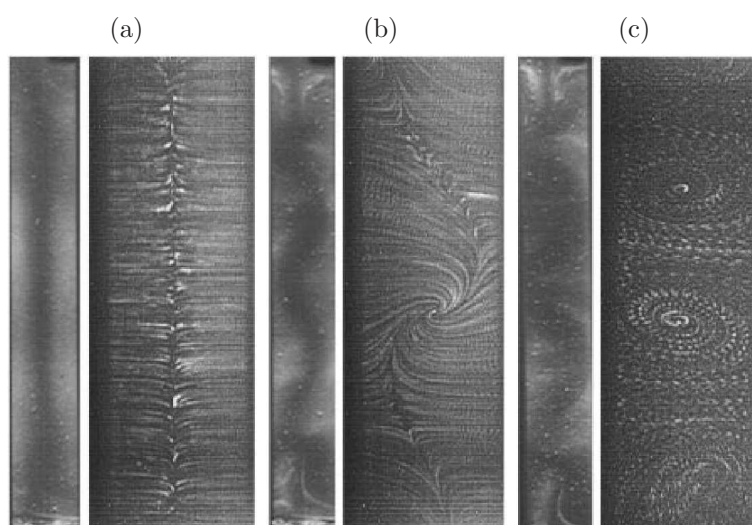


Abbildung 5.3.: Visualisierung der Strömung einer verdünnten Glycerin-Wasser-Mischung in einer 4-Rollen-Mühle in der (e_2, e_3) -Ebene bzw. der Ebene $x = 0$ aus Abb. 5.2 (nach Andreotti et al., 2001). Die kritische Reynoldszahl ist $Re_c = \lambda \Delta^2 / \nu \approx 16$, wobei λ die Dehnrate ist (in den Koordinaten von Abb. 5.2 ist $\lambda_{1,2} = \pm\lambda, \lambda_3 = 0$) und Δ den Rollenabstand bezeichnet. Es ist $Re = 8.7$ (a), 15.9 (b) und 19.1 (c). Das jeweils linke Bild zeigt eine Visualisierung mittels *Kalliroscope*-Partikeln (ähnlich wie Aluminium-Flitter), während das rechte Bild Streichlinien zeigt.

die Wellenzahl im Experiment praktisch nicht. Außerdem scheint die Polarisierung $\mathbf{a} \sim \mathbf{e}_3$ zu entsprechen (y -Richtung in Abb. 5.2). Damit ist das Geschwindigkeitsfeld parallel zur negativen Dehnrichtung, was zur Instabilität führt. Für nichtlineare dreidimensionale Störungen einer ebenen Dehnströmung, die endliche Amplituden haben, siehe auch Kerr and Dold (1994).

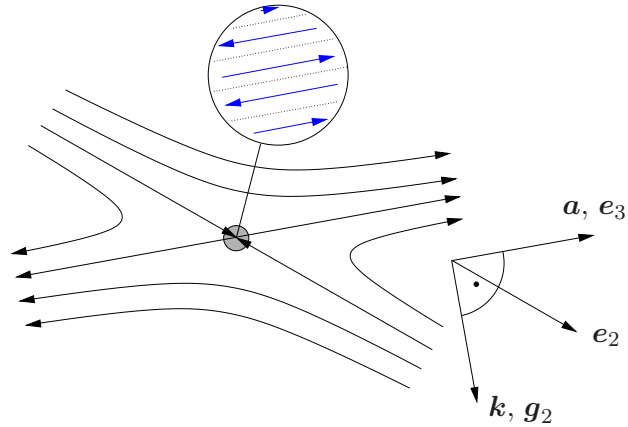


Abbildung 5.4.: Schematische Darstellung einer instabilen lokalen Mode bei dominierender ebener Dehnung, wenn die Dehn- und Stauchrichtungen nicht orthogonal zueinander sind.

5.2.2. Dominierende Dehnung

Grundströmung

Wenn $\mathbf{f} \neq 0$ ist, muß $\det \mathcal{L}_+ = 0$ sein. Sei nur ein Eigenwert von \mathcal{L} gleich Null, z. B. $\lambda_1 = 0$ mit normiertem Eigenvektor \mathbf{e}_1 . Da die Spur $\mathcal{L} = \sum \lambda_i = 0$ ist, müssen sich die beiden anderen Eigenwerte kompensieren. Wir betrachten hier den reellen Fall, wo $\lambda_{2,3} = \pm\lambda \in \mathbb{R}$ ist mit $\lambda > 0$. Da $\mathbf{f} \neq 0$ ist, enthält \mathcal{L} einen antisymmetrischen Anteil (Rotation) und ist weder rein symmetrisch noch rein antisymmetrisch. Damit ist \mathcal{L} nicht normal. Die beiden normierten Eigenvektoren \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 von \mathcal{L} (entsprechend der Dehnung) stehen zwar senkrecht auf \mathbf{e}_1 (Richtung der Rotation), sind aber nicht orthogonal zu einander ($\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \neq 0$).

Dann kann man die Matrix \mathcal{L} darstellen als

$$\mathcal{L} = \lambda \mathbf{e}_2 \mathbf{g}_2 - \lambda \mathbf{e}_3 \mathbf{g}_3, \quad (5.33)$$

mit $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 / (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)$ und $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 / (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)$.¹⁵ Damit können wir das Geschwindigkeitsfeld der Grundströmung in der Nähe des Punktes $\mathbf{x} = 0$ schreiben als

$$\mathbf{U} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{x} = \lambda (\mathbf{e}_2 \mathbf{g}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{g}_3) \cdot \mathbf{x}. \quad (5.34)$$

Die Stromlinien in der Nähe des Stagnationspunkts sind zweidimensionale Hyperbeln in der Ebene, die senkrecht zu \mathbf{e}_1 (Richtung der Vortizität) ist. Die Verhältnisse sind in Abb. 5.4 dargestellt.

¹⁵Man kann leicht prüfen, daß \mathcal{L} die gewünschten Eigenwerte besitzt. Wenn man \mathcal{L} zum Beispiel von links und von rechts skalar mit \mathbf{e}_2 multipliziert, erhält man

$$\mathbf{e}_2 \cdot \underbrace{\mathcal{L} \cdot \mathbf{e}_2}_{\lambda \mathbf{e}_2} = \lambda \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \lambda.$$

Durch links/rechts-Multiplikation mit \mathbf{e}_3 und \mathbf{e}_1 erhält man die Eigenwerte $-\lambda$ und 0 .

Stabilität

Mit \mathcal{L} nach (5.33) lautet Gleichung (5.16b) für \mathbf{k}

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\lambda(\mathbf{g}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{g}_3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{k}. \quad (5.35)$$

Wenn nun $\mathbf{k}_0 = \mathbf{g}_2$ ist, so bleibt \mathbf{k} immer parallel zu \mathbf{g}_2 , also senkrecht zur einlaufenden Stromlinie, da $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{g}_2 = 0$ ist, und die Lösung lautet (beachte: $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = 1$)

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{g}_2 \exp(-\lambda t). \quad (5.36)$$

Für die Amplitude ergibt sich damit

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\left(\mathcal{I} - 2\frac{\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2}{g_2^2}\right) \cdot \mathcal{L} \cdot \mathbf{a} = -\lambda\left(\mathcal{I} - 2\frac{\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2}{g_2^2}\right) \cdot (\mathbf{e}_2\mathbf{g}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{g}_3) \cdot \mathbf{a}. \quad (5.37)$$

Wenn wir nun $\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_3$ wählen, so ist wegen $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ die Polarisation der Amplitude immer parallel zu \mathbf{e}_3 und es verbleibt

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lambda\mathcal{I} \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{e}_3\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{a}, \quad (5.38)$$

woraus die Amplitude ($\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1$)

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{e}_3 \exp(\lambda t) \quad (5.39)$$

folgt. Mit $\lambda > 0$ ist auch in diesem Fall die Grundströmung exponentiell instabil. Auch hier kann man natürlich $\mathbf{k}_0 = \mathbf{e}_1$ wählen. Dann ist $\mathbf{k} = \text{const}$. Die Amplitude bleibt davon unberührt. Die Stabilitätsanalyse für lineare ebene Strömungen mit dominierender Dehnung unter Berücksichtigung der Viskosität wurde von [Lagnado et al. \(1984\)](#) durchgeführt.

5.2.3. Scherströmung

Grundströmung

Wenn \mathcal{L} einen dreifach entarteten (identischen) Eigenwert $\lambda = 0$ hat, dann gibt es zwei Eigenvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 , die man orthogonal wählen kann, und einen sogenannten adjungierten Vektor \mathbf{e}_3 , der senkrecht auf den beiden anderen steht. In diesem Fall kann man \mathcal{L} bis auf einen Faktor darstellen als¹⁶

$$\mathcal{L} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \quad (5.40)$$

¹⁶Der Operator \mathcal{L} ist offenbar nicht normal, denn

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathcal{L}^\dagger\mathcal{L}$$

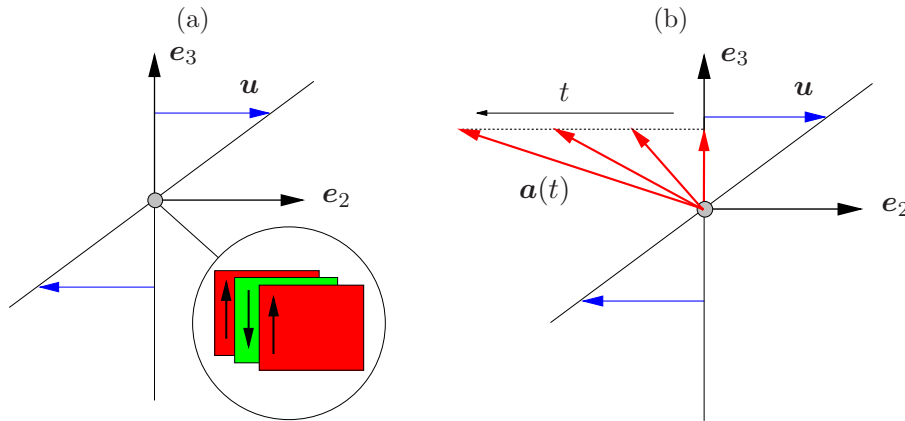


Abbildung 5.5.: (a) Scherströmung und Orientierung des Wellenvektors sowie der Polarisation der algebraisch instabilen lokalen Mode. (b) Zeitliche Entwicklung der Störung $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_3$ (rot) für $\mathbf{k}(t) = k_0 \mathbf{e}_1 = \text{const.}$

Durch links/rechts-Multiplikation mit \mathbf{e}_i sieht man sofort, daß alle Eigenwerte verschwinden (Eigenvektor $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{f}$). Das Geschwindigkeitsfeld hat dann die Form

$$\mathbf{U} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2}_{\mathcal{L}^T}. \quad (5.41)$$

Dies entspricht dem Fall einer reinen Scherströmung.¹⁷ Die Strömungsrichtung ist durch \mathbf{e}_2 gegeben und der Gradient des Geschwindigkeitsfeldes steht senkrecht dazu, denn $\mathbf{e}_2 \cdot \nabla \mathbf{U} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathcal{L}^T = 0$ und $\mathbf{e}_3 \cdot \nabla \mathbf{U} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathcal{L}^T = \mathbf{e}_2$. Dies ist in Abb. 5.5a dargestellt.

Stabilität

Mit $\mathcal{L} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ (5.40) sehen wir, daß wir eine Polarisation $\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_3$ in Richtung des Geschwindigkeitsgradienten wählen müssen, denn sonst hätten wir nach (5.16c) gar keinen Zuwachs in der Amplitude. Mit $\mathbf{k}_0 = \mathbf{e}_1$ und $\mathcal{L}^T = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2$ ist $\mathcal{L}^T \cdot \mathbf{k}_0 = 0$ und der \mathbf{k} -Vektor bleibt konstant: $\mathbf{k}(t) = k_0 \mathbf{e}_1$. Für die Amplitude ergibt sich somit

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -(\mathcal{I} - 2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathcal{L} \cdot \mathbf{a} \stackrel{\mathbf{e}_1 \cdot \mathcal{L} = 0}{=} -\mathcal{L} \cdot \mathbf{a}. \quad (5.42)$$

¹⁷Wenn man $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ wählt, entspricht die durch (5.41) dargestellte Strömung

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y = \mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Lokale Stabilitätsanalyse

In Komponenten heißt dies

$$\dot{a}_1 = 0, \quad (5.43a)$$

$$\dot{a}_2 = -a_3, \quad (5.43b)$$

$$\dot{a}_3 = 0. \quad (5.43c)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\mathbf{a}(t=0) = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 0)^T$ erhalten wir die Lösung

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_2 t + \mathbf{e}_3. \quad (5.44)$$

Der Betrag der Amplitude wächst im wesentlichen linear mit der Zeit an. Durch die konstante Komponente der Störung $a_3(t)$ wird Fluid mit geringerem *2-Impuls* in 3-Richtung transportiert. Daher nimmt die 2-Komponente der Störung immer mehr ab (siehe Abb. 5.5b).

Das lineare Wachstum der Amplitude stellt eine **algebraische Instabilität** dar (siehe auch Landahl, 1980). Sie ist viel schwächer als eine exponentielle. Auf den ersten Blick scheint dieses Ergebnis im Gegensatz zum Rayleigh-Kriterium zu stehen.¹⁸ Tatsächlich besteht hier aber kein Widerspruch, denn das Rayleigh-Theorem macht nur Aussagen über exponentielle Instabilitäten.

Die Anfangsstörung mit Polarisation in \mathbf{e}_3 -Richtung wird algebraisch verstärkt, so daß die Polarisation im Laufe der Zeit in Hauptströmungsrichtung ausgerichtet wird. Die Komponente der Störung senkrecht zur Strömung bleibt konstant, während die Komponente in Stromrichtung linear mit der Zeit anwächst. Der Mechanismus ist klar: Durch eine Polarisation der Störung in positiver (negativer) \mathbf{e}_3 -Richtung wird Fluid mit einer geringen (hohen) Geschwindigkeit (siehe Abb. 5.5) in ein Gebiet mit höherer (geringerer) Geschwindigkeit transportiert. Dies führt zu Variationen in \mathbf{e}_1 -Richtung des Geschwindigkeitsfelds in Stromrichtung, den sogenannten **streaks**. Dieser Vorgang wird auch oft als *lift-up*-Prozeß bezeichnet. Die *streaks* sind typische Strukturen in Scherströmungen. Ein Beispiel ist in Abb. 5.6 gezeigt.

Wie steht nun das algebraische Wachstum in einer idealen Strömung mit den exponentiellen Moden einer viskosen Strömung im Zusammenhang? In Abschnitt 5.2.5 wird gezeigt, daß die algebraische Instabilität durch jede noch so kleine Viskosität letztendlich unterdrückt wird. Trotzdem kann es in Scherströmungen für eine gewisse endliche Zeit zu einem algebraischen Wachstum kommen. Das transiente Wachstum hängt von den Anfangsbedingungen ab. Wenn die Normalmoden nicht orthogonal zueinander sind, können gewisse Überlagerungen von (linear stabilen) Normalmoden zu einem transienten Wachstum führen. Dabei wird eine kleine

¹⁸Das Wendepunkt-Kriterium von Rayleigh für ideale parallel Strömungen besagt, daß die Strömung instabil sein kann, wenn das Geschwindigkeitsprofil $U(z)$ einen echten Wendepunkt enthält mit $U''(z) = 0$, wobei das Vorzeichen von U'' wechselt (siehe Abschnitt 6.1.3). Die hier betrachtete lineare Scherströmung ist jedoch in dem Sinne entartet, daß zwar überall $U''(z) = 0$ ist, aber nirgendwo $U''(z) \neq 0$.

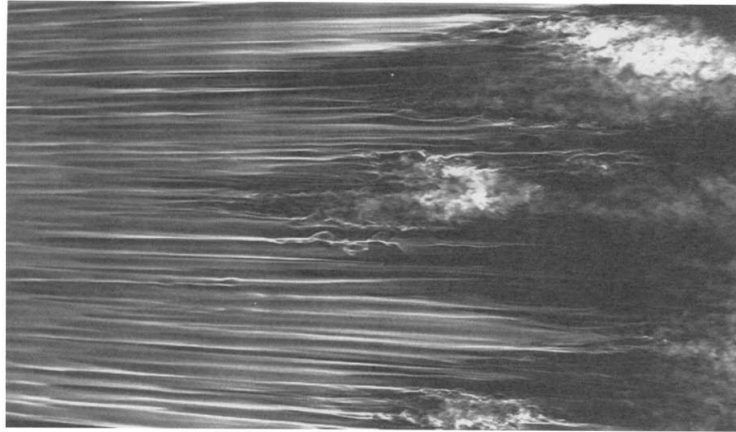


Abbildung 5.6.: Typische Streifenstrukturen in einer Grenzschichtströmung mit einem Turbulenzgrad von 2.2% während des Umschlags in die Turbulenz (aus Schmid and Henningson (2001)). Die Muster wurden durch Rauch visualisiert. Stromabwärts brechen die Streifenstrukturen zusammen und es bilden sich turbulente Flecken aus.

Störung anfänglich exponentiell verstärkt. Danach folgt je nach Reynoldszahl ein linearer (algebraischer) Anstieg und schließlich klingt die Störung für $t \rightarrow \infty$ wieder exponentiell ab. Je höher die Reynoldszahl ist (je kleiner der Viskositätseinfluß), desto länger ist die lineare Wachstumsphase (Hanifi and Henningson, 1998). Diese Phase des Wachstums entspricht der oben beschriebenen algebraischen Instabilität eines idealen Fluids. In viskosen Fluiden ist das lineare Wachstum jedoch nur transient.¹⁹

5.2.4. Elliptische Strömung

Schließlich kann \mathcal{L} einen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit normiertem Eigenvektor \mathbf{e}_1 haben und zwei rein imaginäre Eigenwerte $\lambda_{2,3} = \pm i\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R} > 0$ und entsprechenden normierten konjugiert komplexen Eigenvektoren $\mathbf{e}_{2,3}$, die beide orthogonal zu \mathbf{e}_1 sind. In diesem Fall ist

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3 - \lambda \mu \mathbf{g}_3 \mathbf{g}_2. \quad (5.45)$$

Die orthonormalen reellen Vektoren \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 haben die Form

$$\mathbf{g}_2 = \frac{i\sqrt{\mu^2 + 1}}{2} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{2\mu} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \quad (5.46)$$

Der Vektor \mathbf{g}_2 entspricht dem Imaginärteil und der Vektor \mathbf{g}_3 dem Realteil von \mathbf{e}_2 bzw. \mathbf{e}_3 .²⁰

¹⁹Das transiente Wachstum von Störungen wird in Kapitel 8.2 behandelt.

²⁰Probe durch Einsetzen.