

der ersten Gleichung skalar mit  $\mathbf{a} \neq 0$  erhalten wir daher die sogenannte Eikonalgleichung

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \Phi = 0. \quad (5.7)$$

Die Phase  $\Phi$  wird also nur passiv mit der Strömung transportiert. Damit muß aber auch der Druck verschwinden:  $\pi = 0$ . Es handelt sich also hier um sogenannte drucklose Strömungen.<sup>3</sup> Durch Ortsableitung der Eikonalgleichung (5.7) erhalten wir die Transportgleichung für den lokalen Wellenvektor

$$\nabla \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\nabla\Phi}{dt} + (\nabla\mathbf{U}) \cdot \nabla\Phi = 0. \quad (5.8)$$

Diese Gleichung werden wir später benötigen.

In der nächsthöheren Ordnung  $O(\epsilon^1)$  ergibt sich aus (5.5a)–(5.5b) mit  $\pi = 0$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{U} = 0 \quad (5.9a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (5.9b)$$

Da nach (5.6b)  $\mathbf{a}$  orthogonal zu  $\nabla\Phi$  sein muß, erhalten wir die Transportgleichung für die Amplitude, indem wir Gleichung (5.9a) mit Hilfe des transversalen Operators<sup>4</sup>

$$\mathcal{I} - \frac{\nabla\Phi \nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \quad (5.10)$$

auf die transversale Richtung projizieren, wobei  $\mathcal{I}$  die Einheitsmatrix ist und  $\nabla\Phi \nabla\Phi = (\partial_i\Phi)(\partial_j\Phi)$  das dyadische Produkt. Dies liefert

$$\left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{U} \right) \cdot \left( \mathcal{I} - \frac{\nabla\Phi \nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} \right) = 0. \quad (5.11)$$

Wenn wir die Orthogonalitätsbedingung (5.6b) im mitbewegten System ableiten (also  $d/dt$ ), erhalten wir

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \nabla\Phi) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \nabla\Phi + \mathbf{a} \cdot \frac{d\nabla\Phi}{dt} = 0. \quad (5.12)$$

Unter Ausnutzung der Transportgleichung für den lokalen Wellenvektor (5.8) erhalten wir dann

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \nabla\Phi = -\mathbf{a} \cdot \frac{d\nabla\Phi}{dt} \stackrel{(5.8)}{=} \mathbf{a} \cdot [(\nabla\mathbf{U}) \cdot \nabla\Phi]. \quad (5.13)$$

Diese Beziehung kann verwendet werden, um die Transportgleichung für die Amplitude (5.11) umzuschreiben zu

$$\left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{U} \right) - 2\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{U} \cdot \frac{\nabla\Phi \nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2} = 0. \quad (5.14)$$

<sup>3</sup>Siehe dazu auch die Ausführungen von [Leblanc and Cambon \(1997\)](#).

<sup>4</sup>Beachte, daß die Projektion  $(\nabla\Phi/|\nabla\Phi|)(\nabla\Phi/|\nabla\Phi|) \cdot \mathbf{y}$  die vektorielle Komponente von  $\mathbf{y}$  liefert, die parallel zum Vektor  $\nabla\Phi$  ist.

## 5. Lokale Stabilitätsanalyse

Mit der Notation  $\mathbf{k} = \nabla\Phi$  erhalten wir schließlich aus (5.8) und (5.14) die Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla U \cdot \mathbf{k}, \quad (5.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\mathbf{a} \cdot \nabla U + 2\mathbf{a} \cdot \nabla U \cdot \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (5.15b)$$

Diese Gleichungen beschreiben die zeitliche Entwicklung (im mitbewegten Koordinatensystem) einer lokalisierten Störung  $[\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)]$ , die zum Zeitpunkt  $t = t_0$  durch die einhüllende Amplitude  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t_0)$  und den Wellenvektor  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t_0)$  gegeben ist. Ein allgemeines Wellenpaket läßt sich aufgrund der Linearität der Gleichungen durch Superposition bzw. Integration über alle  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{k}$  konstruieren.

Mit Hilfe der Methode der Charakteristiken kann man diese Gleichungen auch als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die punktwisen Größen  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}[\mathbf{x}(t)]$  und  $\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}[\mathbf{x}(t)]$  auffassen, die zum Zeitpunkt  $t = t_0$  bei  $\mathbf{x}_0$  die Anfangswerte  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\mathbf{x}_0, t_0)$  und  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}(\mathbf{x}_0, t_0)$  hatten und sich entlang der Charakteristiken (hier die Trajektorien)  $\mathbf{x}(t)$  bewegen.<sup>5</sup>

Wenn man  $\nabla U =: \mathcal{L}^T$  setzt,<sup>6</sup> erhält man dann für die punktwisen Größen  $[\mathbf{a}(t), \mathbf{k}(t), \mathbf{x}(t)]$  das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}, \quad (5.16a)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\mathcal{L}^T \cdot \mathbf{k}, \quad (5.16b)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\left(\mathcal{I} - 2\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}\right) \cdot \mathcal{L} \cdot \mathbf{a}. \quad (5.16c)$$

Je nach Grundströmung wird man das System analytisch (nur in einzelnen Fällen möglich) oder numerisch lösen müssen. Dabei müssen im Prinzip alle möglichen Anfangsorte  $\mathbf{x}_0$ , Anfangswellenvektoren  $\mathbf{k}_0$  und Anfangspolarisationen  $\mathbf{a}_0$  untersucht werden. Da die Gleichungen aber nicht von den Beträgen der Amplitude und des

<sup>5</sup>Formal müßte man dazu die charakteristischen Kurven im vierdimensionalen Raum  $[\mathbf{x}(\tau), t(\tau)]$  einführen, die von einem Parameter  $\tau$  abhängen und vom Punkt  $[\mathbf{x}_0, t_0]$  ausgehen. Durch die Wahl

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{U}$$

erhält man dann

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \nabla \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{d\tau}.$$

<sup>6</sup> $\mathcal{L}$  ist so definiert, daß bei linearen Strömungen  $\mathbf{U} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{x}$  ist:

$$U_i = \mathcal{L}_{ij}x_j \quad \Rightarrow \quad \partial_k U_i = \mathcal{L}_{ij}\partial_k x_j = \mathcal{L}_{ij}\delta_{kj} = \mathcal{L}_{ik} = \mathcal{L}_{ki}^T.$$

Wenn  $\mathcal{L}$  von  $\mathbf{x}$  abhängt, ergibt sich  $\mathbf{U} = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ .

Wellenvektors abhängen, reicht es aus, nur die Einheitsvektoren mit  $|\mathbf{a}_0| = 1$  und  $|\mathbf{k}_0| = 1$  zu betrachten.

Lifschitz and Hameiri (1991) haben bewiesen, daß die Grundströmung instabil ist, d.h. daß die Lösung der Eulergleichung zeitlich über alle Grenzen anwächst, wenn mindestens eine Trajektorie existiert, entlang welcher die punktweise Amplitude  $\mathbf{a}$  unbegrenzt anwächst. Seien  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{k}_0$  und  $\mathbf{a}_0$  der Ort des Wellenpakets, die Orientierung der Wellenfront und die Polarisierung der Amplitude zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Dann ist die Grundströmung instabil, wenn

$$\sup_{\substack{\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{a}_0 \\ |\mathbf{k}_0|=1, |\mathbf{a}_0|=1, \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{a}_0=0}} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{a}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{a}_0)| \right] = \infty. \quad (5.17)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist die Grundströmung auch linear instabil im Sinne einer globalen Analyse, und es existiert ein instabiler Eigenwert (Realteil  $> 0$ ) des zugehörigen spektralen Problems.

Mit Hilfe des WKB-Ansatzes kann man die Viskosität nicht direkt mitnehmen, da der dissipative Term für  $\epsilon \rightarrow 0$  alles andere dominieren würde. Wenn die Grundströmung jedoch keine ausgezeichnete Längenskala enthält, wie es bei linearen Strömungen ( $\mathbf{U} \propto \mathbf{x}$ ) der Fall ist, dann kann man auch die Viskosität berücksichtigen. Mit Hilfe einer Fourier-Transformation und der Charakteristikenmethode kommen Lagnado et al. (1984) bei ihrer Stabilitätsanalyse von hyperbolischen (linearen) Strömungen auf dieselben Gleichungen wie (5.16a)–(5.16c), wobei zusätzliche nur der viskose Term  $-\nu k^2 \mathbf{a}$  auf der rechten Seite der Amplitudengleichung (5.16c) zu ergänzen ist (siehe auch Abschnitt 5.2.5).

Die Approximation der Stabilitätsgleichungen durch den Term führender Ordnung des WKB-Ansatzes (5.4), also durch  $f = f(\mathbf{x}, t)e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon}$ , wird auch Approximation der *geometrischen Optik* genannt. Dies kommt daher, daß man die geometrische Optik (Strahlenoptik) aus der Wellenoptik im Limes kleiner Wellenlängen (hier  $\epsilon \rightarrow 0$ ) ableiten kann.

## 5.2. Lokale Instabilität von Stagnationspunkten

Wir wollen nun die lokale Stabilitätsanalyse auf ein wichtiges Problem anwenden und betrachten die Stabilität von Strömungen in der Nähe von nicht-entarteten Stagnationspunkten  $\mathbf{x}_0$ . Für sie gilt:  $\mathbf{U}(\mathbf{x}_0) = 0$  und  $\nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Abkürzend wollen wir den transponierten Geschwindigkeitsgradiententensor schreiben als  $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = [\nabla \mathbf{U}(\mathbf{x})]^T$ .

Die Trajektorie eines Stagnationspunktes ist trivial:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ . Sie ist punktförmig. Daher hängen die Gleichungen (5.16a)–(5.16c) nur von der Matrix  $\mathcal{L}$  ab. Die Stabilität des Stagnationspunktes ist also unabhängig von der Strömung  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  weit weg vom Stagnationspunkt und hängt nicht von den Bedingungen für  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  ab. Die Strömung in der unmittelbaren Umgebung des Stagnationspunktes ist dann

$$\mathbf{U} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{x} = \mathcal{L}_{ij} x_j, \quad (5.18)$$

## 5. Lokale Stabilitätsanalyse

wobei wir hier o.B.d.A.  $\mathbf{x}_0 = 0$  gesetzt haben und  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x} = 0)$ . Die resultierenden Gleichungen sind äquivalent zu der Stabilitätsanalyse einer linearen Strömung. Der Fall reiner Rotation wurde in Abschnitt 4.7.1 bzw. 4.8.2 diskutiert, und die elliptische Strömung wurde in Abschnitt 4.8.3 behandelt.

Der Geschwindigkeitsgradiententensor  $\mathcal{L}$  muß verschiedene Bedingungen erfüllen. Um dies zu sehen, zerlegen wir ihn in einen symmetrischen ( $\mathcal{L}_+$ : Dehnung) und einen antisymmetrischen ( $\mathcal{L}_-$ : Rotation) Anteil  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$ . Die Divergenzfreiheit der Grundströmung,  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ , erfordert

$$\partial_i U_i = \partial_i \mathcal{L}_{ij} x_j = \mathcal{L}_{ij} \partial_i x_j = \mathcal{L}_{ij} \delta_{ij} = \mathcal{L}_{ii} = \text{Spur} \mathcal{L} = \text{Spur} \mathcal{L}_+ = 0. \quad (5.19)$$

Für die stationäre Grundströmung gilt  $\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\rho^{-1} \nabla P$ , oder  $\mathbf{U} \cdot \mathcal{L}^T = \mathcal{L} \cdot \mathbf{U} = -\rho^{-1} \nabla P$ , bzw.  $\mathcal{L}_{ij} U_j = -\rho^{-1} \partial_i P$ . Die Ableitung nach  $\mathbf{x}$  ergibt (Gradientenbildung,  $\partial_k$ ) ergibt

$$\underbrace{\mathcal{L}_{ij} \partial_k U_j}_{\mathcal{L}_{jk}} = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) \cdot (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) = -\rho^{-1} \partial_k \partial_i P. \quad (5.20)$$

Die rechte Seite ist ein symmetrischer Tensor (Vertauschung von  $k$  und  $i$ ). Daher muß der antisymmetrische Teil der linken Seite der Gleichung verschwinden und wir erhalten<sup>7</sup>

$$\mathcal{L}_+ \cdot \mathcal{L}_- = -\mathcal{L}_- \cdot \mathcal{L}_+. \quad (5.21)$$

Der Ausdruck  $\mathcal{L}_- \cdot \mathbf{x}$  ist das Geschwindigkeitsfeld einer starren Rotation. Er läßt sich schreiben als<sup>8</sup>

$$\mathcal{L}_- \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f} \times \mathbf{x}, \quad (5.22)$$

mit  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\Omega}/2$  dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit der starren Rotation. Daraus folgt<sup>9</sup>

$$\mathcal{L}_+ \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (5.23)$$

Dies bedeutet, daß eine **starre** Rotation nie mit einer **linearen** Dehnung ( $\sim |\mathbf{x}|$ ) in Richtung der Vortizität  $\boldsymbol{\Omega}$  einhergehen kann, denn  $\mathbf{U}_{\text{Dehn}} \cdot \mathbf{f} = (\mathcal{L}_+ \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f} =$

<sup>7</sup>Das heißt nicht, daß  $\mathcal{L}_+ \cdot \mathcal{L}_-$  antisymmetrisch ist.

<sup>8</sup>Es ist ja

$$\mathbf{f} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} f_2 x_3 - f_3 x_2 \\ f_3 x_1 - f_1 x_3 \\ f_1 x_2 - f_2 x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -f_3 & f_2 \\ f_3 & 0 & -f_1 \\ -f_2 & f_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymmetrisch}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

<sup>9</sup>Das kann man sehen, wenn man  $\nabla \times \mathcal{L}_+ \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{x})$  bildet. In Indexschreibweise erhält man so

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathcal{L}_+ \cdot \mathbf{f} \times \mathbf{x}) &= \nabla \times (\mathcal{L}_+ \cdot \mathcal{L}_- \cdot \mathbf{x}), \\ \epsilon_{mni} \partial_n \mathcal{L}_{ij}^+ \epsilon_{jkl} f_k x_l &= \epsilon_{mni} \partial_n \mathcal{L}_{ij}^+ \mathcal{L}_{jk}^- x_k, \\ \epsilon_{mni} \epsilon_{jkl} \mathcal{L}_{ij}^+ f_k \delta_{nl} &= \epsilon_{mni} \mathcal{L}_{ij}^+ \mathcal{L}_{jk}^- \delta_{nk}, \\ \epsilon_{mli} \epsilon_{jkl} \mathcal{L}_{ij}^+ f_k &= \epsilon_{mki} \mathcal{L}_{ij}^+ \mathcal{L}_{jk}^-. \end{aligned}$$

Die rechte Seite verschwindet, da  $\mathcal{L}_{ij}^+ \mathcal{L}_{jk}^-$  ein symmetrischer Tensor ist und im Produkt mit  $\epsilon_{mki}$  (vollständig antisymmetrischer Tensor) verschwindet. Die Symmetrie ergibt sich folgendermaßen

$\boldsymbol{x} \cdot \mathcal{L}_+ \cdot \boldsymbol{f} = 0$ .<sup>10</sup> Bei Anwesenheit von Rotation muß eine lineare Dehnströmung immer in der Ebene senkrecht zu  $\boldsymbol{f}$  bzw.  $\boldsymbol{\Omega}$  liegen.

Um die Gleichung (5.23) zu erfüllen gibt es folgende Möglichkeiten.

- Entweder ist  $\det |\mathcal{L}_+| \neq 0$ , hat also drei von Null verschiedene Eigenwerte (Fall 1). Dann muß  $\boldsymbol{f} = 0$  sein (reine Dehnströmung, keine Rotation,  $\boldsymbol{\Omega} = 0$ ).
- Oder aber, es ist  $\det |\mathcal{L}_+| = 0$ . Dann ist mindestens einer der drei Eigenwerte gleich Null und der entsprechende Eigenvektor  $\boldsymbol{e}$  muß parallel zu  $\boldsymbol{f}$  sein, denn es ist auch  $\mathcal{L}_+ \cdot \boldsymbol{e} = 0$ . In diesem Fall können die beiden anderen Eigenwerte entweder reell sein (Fall 2), oder rein imaginär und konjugiert komplex (Fall 4). Schließlich können noch alle drei Eigenwerte gleich Null sein (Fall 3).

Bevor wir die entsprechenden vier Fallunterscheidungen treffen, seien einige Bemerkungen zu **normalen** und **nicht-normalen Matrizen** gemacht. Eine Matrix  $\mathcal{L}$  ist normal, genau dann wenn

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \cdot \mathcal{L}, \quad (5.24)$$

wobei  $\dagger$  das Adjungierte (transponiert und konjugiert komplex) bedeutet. Falls die Bedingung (5.24) nicht erfüllt ist, ist  $\mathcal{L}$  nicht normal. Wichtig ist, daß die Eigenvektoren normaler Matrizen orthogonal sind, während die Eigenvektoren nicht-normaler Matrizen nicht orthogonal sein müssen. Da die lineare Strömung hier durch eine reelle Matrix mit Eigenschaft (5.21) beschrieben wird, ist  $\mathcal{L}$  normal, wenn entweder  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$  rein symmetrisch ist, oder wenn  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_-$  rein antisymmetrisch ist.<sup>11</sup> Wenn  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$  ist, sind daher die Eigenvektoren orthogonal, andernfalls müssen sie es nicht sein. Im folgenden betrachten wir die 4 Fälle, die auftreten können.

---

Ben:  $\mathcal{L}_{ij}^+ \mathcal{L}_{jk}^- \stackrel{(5.21)}{=} -\mathcal{L}_{ij}^- \mathcal{L}_{jk}^+ \stackrel{\text{symm., antisymm.}}{=} \mathcal{L}_{ji}^- \mathcal{L}_{kj}^+ = \mathcal{L}_{kj}^+ \mathcal{L}_{ji}^-$ . Es bleibt übrig

$$\underbrace{\epsilon_{lim} \epsilon_{ljk}}_{\delta_{ij} \delta_{mk} - \delta_{ik} \delta_{mj}} \mathcal{L}_{ij}^+ f_k = \underbrace{\mathcal{L}_{ii}^+}_{\substack{=0, \\ (5.19)}} f_m - \mathcal{L}_{km}^+ f_k = -\mathcal{L}_{mk}^+ f_k = 0,$$

woraus (5.23) folgt.

<sup>10</sup>Eine uniaxiale Dehnung kann dagegen sehr wohl vorhanden sein, wie zum Beispiel beim Burgers-Wirbel (Abschnitt 3.2.4). Die uniaxiale Dehnung  $\boldsymbol{U} = -a r \boldsymbol{e}_r + 2a z \boldsymbol{e}_z$  ist aber keine lineare Funktion des Ortsvektors  $\boldsymbol{x}$ , so wie im vorliegenden Fall.

<sup>11</sup>Es sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$ . Dann liefert die Bedingung (5.24) für normale reelle Matrizen

$$(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) \cdot (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) = (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) \cdot (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_+ \cdot \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_- \cdot \mathcal{L}_+.$$

Für Matrizen, für die (5.21) erfüllen, kann dies nur gelten, wenn entweder  $\mathcal{L}_+ = 0$  oder  $\mathcal{L}_- = 0$  ist.

### 5.2.1. Reine Dehnung

#### Grundströmung

Wenn  $\det |\mathcal{L}_+| \neq 0$  ist und  $\mathbf{f} = 0$ , folgt  $\mathcal{L}_- = 0$  ((5.22), keine Rotation) und  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$ . Dies entspricht dem Fall, in dem die Vortizität im Stagnationspunkt verschwindet. Wir haben also eine reine dreidimensionale Dehnung vorliegen. Da  $\mathcal{L}$  symmetrisch ist und reell, ist  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$  ein selbstadjungierter Operator ( $\mathcal{L}_+^\dagger = \mathcal{L}_+$ ). Damit ist  $\mathcal{L}$  ein normaler Operator und die Eigenvektoren sind orthogonal. Außerdem sind die drei von Null verschiedenen Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$  reell. Mit Spur  $\mathcal{L}_+ = 0$  (Inkompressibilität) muß dann gelten  $\sum \lambda_i = 0$ .

Es sei  $\lambda_1 > 0$  und  $\lambda_3 < 0$ . Mit der Zerlegung des Ortsvektors

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.25)$$

in die drei orthogonalen Richtungen, die durch die orthonormalen Eigenvektoren  $\mathbf{e}_i$  gegeben sind, erhalten wir

$$\mathbf{U} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (5.26)$$

In der Nähe des Stagnationspunktes bilden die Stromlinien dreidimensionale Hyperbeln.<sup>12</sup>

#### Stabilität

Aus (5.26) erhalten wir (hier:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T$ )

$$\mathcal{L}^T \cdot \mathbf{k} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{k}. \quad (5.27)$$

Wenn wir nun als Anfangswert für die  $\mathbf{k}$ -Gleichung (5.16b)  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{e}_1$  wählen (siehe auch Abb. 5.1), dann bleibt  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_1$  und wir erhalten

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = -\lambda_1 k \mathbf{e}_1, \quad (5.28)$$

mit der Lösung

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{e}_1 \exp(-\lambda_1 t). \quad (5.29)$$

Die Wellenlänge  $2\pi/k$  wird bei dieser Anfangsbedingungen also im Laufe der Zeit größer ( $\lambda_1 > 0$ ). Eingesetzt in die Amplitudengleichung (5.16c) liefert dies

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -(\mathcal{I} - 2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathcal{L} \cdot \mathbf{a}. \quad (5.30)$$

<sup>12</sup>Um  $\mathcal{L}$  zu diagonalisieren muß man eine Hauptachsentransformation machen. Dies erreicht man, indem man  $\mathcal{L}$  von rechts mit der Matrix  $\mathbf{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  multipliziert, die aus den drei Eigenvektoren besteht und von links mit  $\mathbf{B}^{-1}$ . Dann erhält man

$$\underbrace{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathbf{B}}_{\mathcal{L}'} \cdot \underbrace{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{x}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 x'_1 \\ \lambda_2 x'_2 \\ \lambda_3 x'_3 \end{pmatrix}$$

und die Eigenwerte geben die Dehnraten in der jeweiligen Koordinatenrichtungen an.