5. Lokale Stabilitätsanalyse

Das vorangegangene Kapitel war der klassischen linearen Stabilität gewidmet. Dabei wurden die Volumengleichungen linearisiert und man hat Lösungen in Form von Normalmoden gesucht. Diese Normalmoden erstrecken sich über den gesamten Raum. Sie sind daher global und man könnte die Stabilitätsanalyse auch eine globale Stabilitätsanalyse nennen.[1]

Eine andere Art der Stabilitätsanalyse wurde von Lifschitz and Hameiri (1991) eingeführt. Bei ihrem Ansatz, den man zur Untersuchung reibungsfreier Strömungen verwenden kann, wird nur eine kleine unmittelbare Umgebung einer Stromlinie untersucht. Daher handelt es sich um eine lokale Analyse. Bei dieser lokalen Stabilitätsanalyse wird der Grundströmung eine kleine und sehr stark lokalisierte Störung in Form eines Wellenpakets überlagert. Diese Störung ist charakterisiert durch einen Wellenvektor und eine Amplitudenfunktion. Zur Analyse wird nun die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets verfolgt während es durch die Strömung entlang einer Stromlinie transportiert wird. Lifschitz and Hameiri (1991) haben gezeigt, daß die Strömung linear instabil ist (im Sinne einer *globalen* Stabilitätsanalyse), wenn mindestens ein $\boldsymbol{k}$-Vektor existiert, für den die Amplitude des Wellenpakets entlang mindestens einer Stromlinie *lokal* instabil ist.

5.1. Ableitung der Stabilitätsgleichungen

Für die lokale Stabilitätsanalyse gehen wir davon aus, daß die Grundströmung $[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t), P(\boldsymbol{x},t)]$ inkompressibel ist und der Eulergleichung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\nabla P = 0, \tag{5.1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0, \tag{5.1b}$$

genügt, wobei

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla \tag{5.2}$$

hier wieder die substantielle Ableitung *bzgl. der Grundströmung* ist, d.h. die zeitliche Ableitung in dem Koordinatensystem, das mit der Grundströmung $\boldsymbol{U}$ mitbewegt wird. Die linearisierten Gleichungen für kleine Störungen $(\boldsymbol{u}, p)$ lauten damit

[1] hk: oft ist dies aber im Phasenraum gemeint. checken.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \tag{5.3a}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{5.3b}$$

Da es sich um ein ideales Fluid handelt, können Störungen auftreten, die auf beliebig kleinen Skalen variieren. Daher ist insbesondere der Limes kleiner Wellenlängen $\boldsymbol{k} \to \infty$ von Interesse. Um diesen Limes zu untersuchen, wird die zeitliche Entwicklung einer Störung in Form eines stark lokalisierten Wellenpakets betrachtet, das räumlich extrem schnell oszilliert. Dazu wird der Ansatz

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \\ p(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t) \\ \pi(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\boldsymbol{x},t)/\epsilon}}_{O(1)} + O(\epsilon), \tag{5.4}$$

gemacht und der Limes $\epsilon \to 0$ betrachtet. Dieser Ansatz ist ein sogenannter WKB-Ansatz (**W**entzel-**K**ramers-**B**rillouin, siehe Bender and Orszag (1978)). Der kleine Parameter ϵ ist ein Maß für die Schnelle der räumlichen Oszillationen. Beachte, daß $\boldsymbol{a}$ und π nicht nach ϵ entwickelt werden, sondern schon die Koeffizienten des führenden Terms sind. Die Terme höherer Ordnung $O(\epsilon)$ des Ansatzes werden hier nicht weiter spezifiziert, da wir nur an der niedrigsten Ordnung interessiert sind, und da man zeigen kann, daß diese Term die nachfolgende Analyse nicht beeinflussen.[2]

Wenn man den Ansatz in die Störungsgleichungen (5.3a)–(5.3b) einsetzt und sie mit ϵ multipliziert, erhält man in führender Ordnung

$$\left[\epsilon \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \epsilon \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{U} + \frac{1}{\rho}\left(\epsilon \nabla \pi + \mathrm{i}\pi \nabla \Phi\right)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/\epsilon} = 0, \tag{5.5a}$$
$$\left(\epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{a} + \mathrm{i}\boldsymbol{a} \cdot \nabla \Phi\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/\epsilon} = 0. \tag{5.5b}$$

Beachte, daß die weiteren Terme der Ordnung $O(\epsilon)$ aus (5.4) erst mit $O(\epsilon^2)$ in (5.5a) eingehen, da der Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/\epsilon}$ nur beim führenden Term steht. In niedrigster Ordnung $O(\epsilon^0)$ ergibt sich daraus

$$\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\pi}{\rho} \nabla \Phi = 0, \tag{5.6a}$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \nabla \Phi = 0. \tag{5.6b}$$

Die zweite Gleichung verlangt, daß $\nabla\Phi$ senkrecht auf der Amplitudenfunktion $\boldsymbol{a}$ steht. Wenn man sich $\nabla\Phi$ als lokalen Wellenvektor vorstellt, kann man leicht einsehen, daß der Wellenvektor keine Komponente in Richtung der Strömung $\boldsymbol{a}$ haben darf, da sonst die Inkompressibilität nicht gewährleistet ist. Nach Multiplikation

[2] Siehe jedoch Lifschitz and Hameiri (1991).