

8. Übergang zur Turbulenz

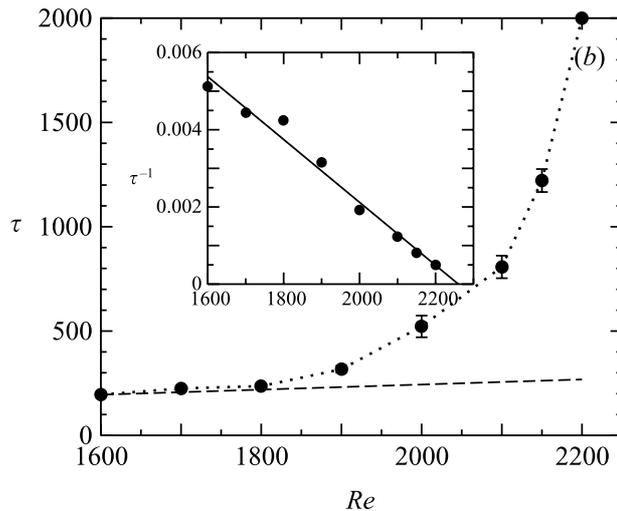


Abbildung 8.48.: Median der turbulenten Lebensdauern als Funktion der Reynoldszahl für die Hagen-Poiseuille-Strömung (nach Faisst and Eckhardt, 2004). Der Fehlerbalken deutet die statistische Ungenauigkeit an. Die gestrichelte Gerade deutet die Lebensdauer an, die man aufgrund des nicht-normalen, rein linearen Wachstums erwarten würde. Die eingefügte Abbildung zeigt einen Fit gemäß $\tau(\text{Re}) \propto (\text{Re}_c - \text{Re})^{-1}$ mit $\text{Re}_c \approx 2250$.

Lebensdauer turbulenter Zustände

Hof et al. (2003) untersuchten die Rohrströmung in einem Experiment, in welchem die Strömung bis zu $\text{Re} = 20\,000$ laminar gehalten werden konnte. Durch eine kleine Bohrung zu Beginn des Rohres wurde die laminare Strömung durch Injektion einer kleinen Fluidmenge gestört. Als Maß für die Störung wurde der injizierte Volumenstrom verwendet. Sie fanden, daß die Stärke der Störung, die erforderlich ist, um auf der gesamten Rohrlänge (die endlich war) Turbulenz auszulösen, wie Re^{-1} abfällt. Dieser Befund ist konsistent mit den numerischen Ergebnissen von Faisst and Eckhardt (2004). Faisst and Eckhardt (2004) zeigten die sensitive Abhängigkeit des Turbulenzübergangs in Rohren von den Anfangsbedingungen. Der Median der Lebensdauer eines turbulenten Zustands ist in Abb. 8.48 gezeigt. Genau wie in den Experimenten zur ebenen Couette-Strömung von Bottin, Daviaud, Manneville and Dauchot (1998) (vgl. Abb. 8.26) fanden Faisst and Eckhardt (2004) das Gesetz $\tau(\text{Re}) \propto (\text{Re}_c - \text{Re})^{-1}$. Durch Extrapolation der Zerfallsrate τ^{-1} des turbulenten Zustands ermittelten sie eine *kritische* Reynoldszahl $\text{Re}_c \approx 2250$.

Die Skalierung $\tau(\text{Re}) \propto (\text{Re}_c - \text{Re})^{-1}$ von Faisst and Eckhardt (2004) (und Moehlis et al. (2004) für die Strömung zwischen Platten) war aber nicht haltbar. Die Skalierung $\tau \sim \text{Re}^{-1}$ entspricht dem Verhalten, das man von einem *chaotischen Sattel* kennt und ist charakteristisch für einen Zerfallsprozeß ohne Gedächtnis; das heißt, der Zerfallsprozeß hängt nicht von der zeitlich vorher gelegenen Dauer des turbulenten Zustands ab. Auch andere Autoren hatten vermutet, daß die Zerfallsrate linear mit der Reynoldszahl absinkt und bei einer bestimmten kritischen Reynoldszahl Null erreicht. Ab dieser Reynoldszahl würde man dann dauerhafte Turbulenz haben (Übergang zwischen transienter und dauerhafter Turbulenz).

Andererseits haben Hof et al. (2006) mit Hilfe eines sehr langen Rohres gezeigt, daß die Zerfallsrate τ^{-1} nicht linear abfällt (also wie $\sim (\text{Re}_c - \text{Re})$), sondern $\tau^{-1} \sim \text{Re}^{-1}$ wie Re^{-1} skaliert. Demnach wäre die Turbulenz immer transient!

Später führten Hof et al. (2008) noch wesentlich genauere Experimente zur Lebensdauer turbulenter Flecken in Rohrströmungen durch. Dabei wurden Experi-

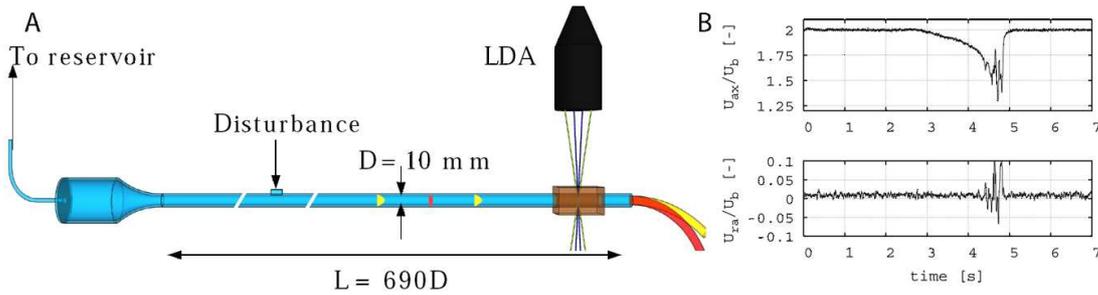


Abbildung 8.49.: (A) Ein typisches Experiment zur Messung von Lebensdauern turbulenter zustände nach Hof et al. (2008). Neben der LDA-Messung wurde auch die Ausströmparabel registriert, deren Öffnung bei konstantem Druckabfall von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit (und damit vom Zustand) abhängt. Das Reservoir wurde unter einer konstanten Druckdifferenz zum Umgebungsdruck gehalten (hydrostatischer Druck). (B) Axiales (oben) und radiales (unten) Geschwindigkeitssignal (LDA, auf der Achse gemessen) beim Durchgang eines Puffs.

mente in verschiedenen Labors durchgeführt. In einem Experiment mit $L/d = 690$ konnte die laminare Strömung bis zu $Re = 10^4$ realisiert werden. Die Störungen, die zur Turbulenz führen, gehen in der Regel vom Einlaß aus. Das besagte Experiment ist in Abb. 8.49 gezeigt, wobei am Ende des Rohrs gemessen wurde, ob dort ein turbulenter Zustand vorliegt oder nicht. Durch Automatisierung der Messung konnte ein hohe Qualität der Statistiken erreicht werden. Einzelne Experimente wurden bis zu 10^5 Mal wiederholt. Die Störungen wurden so eingebracht, daß jedesmal ein turbulenter Fleck in Form eines Puffs ausgelöst wurde. Die Länge des Flecks bleibt während seiner zeitlichen Entwicklung bis zum Zerfall konstant. Auch konnte die Zeit t_0 bestimmt werden, die erforderlich ist, bis sich der turbulente Fleck voll ausgebildet hat.

Ganz allgemein kann man die Wahrscheinlichkeit, nach der Zeit $t - t_0$ einen turbulenten Fleck zu finden, ansetzen als

$$P(t - t_0, Re) = \exp[-(t - t_0)/\tau(Re)], \quad (8.55)$$

wobei die Lebensdauer $\tau(Re)$ eine Funktion der Reynoldszahl ist. Man kann τ^{-1} auch als Zerfallsrate des turbulenten Zustands deuten. Die gemessene Wahrscheinlichkeit, einen turbulenten Fleck anzutreffen ist in Abb. 8.50 (Symbole) für verschiedenen Lauflängen gezeigt. Es wurden auch verschiedene Experimente der beteiligten Labors verwendet. Man sieht, daß die Wahrscheinlichkeiten S-förmige Kurven sind. Wie unten gezeigt, handelt es sich um superexponentielle Fits.

Falls $\tau^{-1}(Re)$ eine lineare Funktion der Reynoldszahl wäre (wie zunächst vermutet wurde), müßten die Kurven einen exponentiellen Verlauf aufweisen. Das ist aber klar nicht der Fall. Zwar stimmen exponentielle Fits (nicht gezeigt) und superexponentielle Fits (durchgezogen) bis $Re = 1870$ gut mit den Experimenten überein, aber das Verhalten für $Re > 1870$ kann nicht mehr durch einen exponentiellen Fit wiedergegeben werden. Die gepunkteten Linien in Abb. 8.50 repräsentieren eine

8. Übergang zur Turbulenz

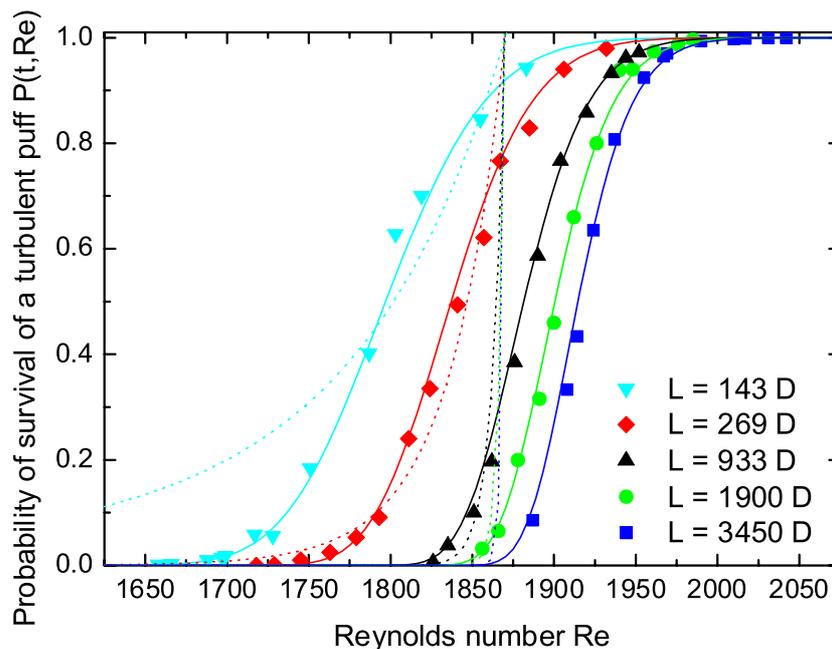


Abbildung 8.50.: Wahrscheinlichkeit $P(t, Re)$ dafür, daß ein turbulenter Zustand auch noch nach einer gewissen Lauflänge turbulent ist. Die Lauflängen betragen von links nach rechts: $x = 140$ (down triangles), 270 (diamonds), 930 (up triangles), 1900 (circles), 3500 (squares). Die durchgezogenen Linien sind superexponentielle Fits wie im Text beschrieben. Die gepunkteten Kurven entsprechen der Skalierung, die Willis and Kerswell (2007) vorgeschlagen hatten (kritisches Verhalten).

Theorie (kritisches Verhalten) von Willis and Kerswell (2007), die aber offenbar auch nicht mit den Messungen kompatibel ist.

Wenn man für alle Meßpunkte die Zerfallsrate $1/\tau$ ermittelt, erhält man das in Abb. 8.51a gezeigte Diagramm. Alle Kurven fallen zu einer gemeinsamen Kurve zusammen. Dies bestätigt auch die Gültigkeit von (8.55) und das Modell eines chaotischen Repellers.²⁴ Man erkennt, daß die Zerfallsrate weder linear noch exponentiell mit der Reynoldszahl skaliert. Bei den Messungen konnte $P(t)$ bis auf 0.9999 aufgelöst werden. Dies ermöglichte Zerfallsraten bis hinunter zu $\tau^{-1} = 10^{-8}$ zu messen; dies sind 4 Größenordnungen weniger als in vorhergehenden Messungen.

In Abb. 8.51b sind die Daten auf einer zweifach logarithmierten Skala dargestellt: $\ln[\ln(\tau)]$. In dieser Auftragung können die Daten durch die Gerade

$$\frac{1}{\tau} = \exp[-\exp(c_1 Re + c_2)] \quad (8.56)$$

repräsentiert werden, mit $c_1 = 0.0057$ und $c_2 = -8.7$. Dies ist eine superexponentielle Fit der Zerfallsrate. Dieser zwei-parametrig Fit kann die Meßdaten über einen Bereich von 8 Größenordnungen gut wiedergeben. Dies bedeutet, daß die Lebensdauer des turbulenten Zustands im Rahmen des Fits nie unendlich wird, aber

²⁴hk: check Beziehung chaotischer Repeller - chaotischer Sattel.

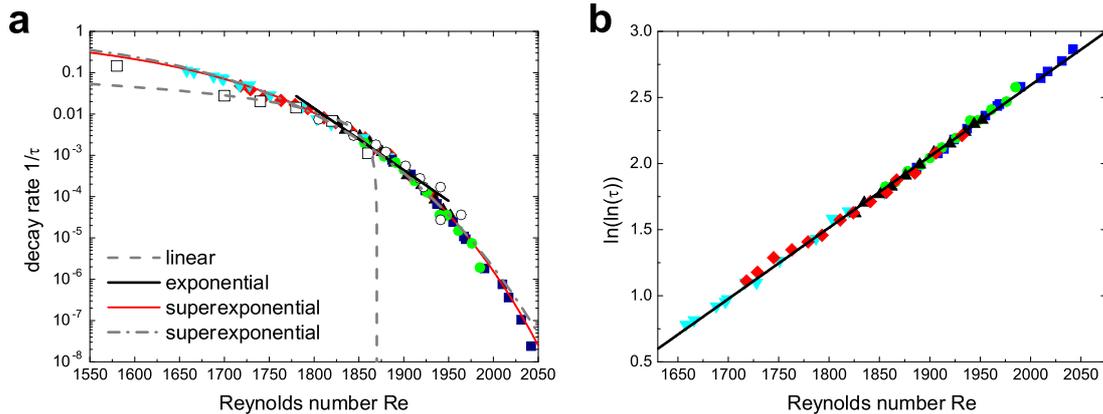


Abbildung 8.51.: (a) Zerfallsrate turbulenter Zustände τ^{-1} , dargestellt auf einer logarithmisch-linearen Skala. Kreise sind Daten die in Rohren mit $D = 10$ mm Durchmesser gemessen wurden. Gefüllte Symbole repräsentieren Daten aus Experimenten mit einem Rohrdurchmesser $D = 4$ mm. Die gestrichelte Linie und die offenen Quadrate entsprechen den Datenpunkten aus dem linearen Fit von Willis and Kerswell (2007). Die schwarze Linie hat eine Steigung, die dem exponentiellen Fit von Hof et al. (2006) entspricht. Die rote durchgezogene Kurve steht für ein superexponentielles Verhalten als Funktion von Re . Die strich-punktierte graue Linie zeigt einen alternativen superexponentiellen Fit. (b) Dieselben Daten wie in (a), nur auf einer doppelt logarithmierten Skala dargestellt. Alle Daten fallen auf eine Gerade nach (8.56), die durch zwei Parameter repräsentiert wird. Dieser Fit wurde auch in (a) für die rot durchgezogene Kurve in (a) verwendet.

extrem schnell anwächst.

Erzeugung und Zerfall von Puffs

Bei niedrigen Reynoldszahlen zerfällt ein zuvor erzeugter Puff nach einer gewissen Zeit. Wenn man die Reynoldszahl aber erhöht, erhöht sich auch die Lebensdauer τ des Puffs ganz enorm. Andererseits kann ein Puff einen weiteren Puff abspalten (siehe Abb. 8.44b). Dieser Prozeß entspricht einer Erzeugung von Puffs. Die Zeit nach welcher ein neuer Puff von einem vorhanden Puff abspaltet verringert sich mit der Reynoldszahl.

Die bisherigen Betrachtungen basierten auf den Eigenschaften eines einzelnen Puffs. Wir betrachten nun ein beliebig langes Rohr, in dem sehr viele Puffs propagieren. Wenn nun die mittlere Lebensdauer der Puffs kürzer ist als die mittlere Zeit, die zur Erzeugung eines weiteren Puffs benötigt wird, dann werden alle Puffs für lange Zeiten verschwinden. Ist umgekehrt die mittlere Lebensdauer eines Puff größer als die mittlere Zeit, die erforderlich ist, einen neuen Puff zu bilden, dann nimmt die Zahl der Puffs im Mittel zu und für lange Zeiten wird die Strömung überall turbulent. Im dem Grenzfall, daß die mittlere Lebensdauer eines Puffs gerade gleich ist mit der Zeit, die für die Erzeugung eines weiteren Puffs im Mittel benötigt wird, dann bleibt die Anzahl der Puffs im Mittel konstant. Man kann diesen Grenzfall zur Definition einer kritischen Reynoldszahl verwenden.

8. Übergang zur Turbulenz

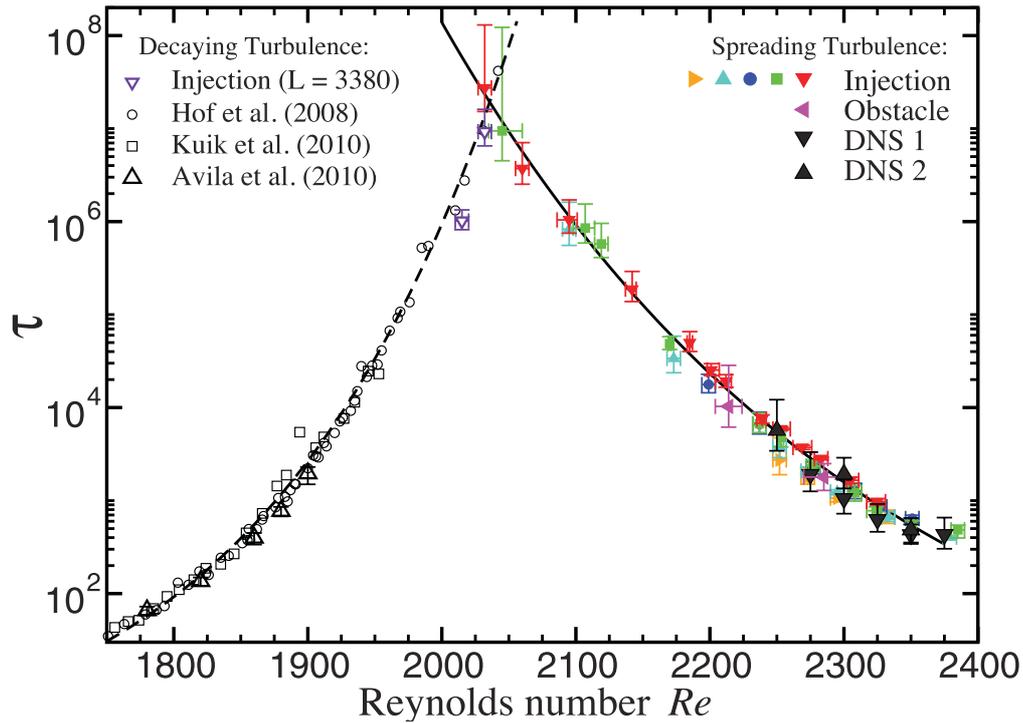


Abbildung 8.52.: Mittlere Lebensdauer eines Puffs (linke gestrichelte Kurve) und mittlere Zeit zur Erzeugung eines Puffs (rechte durchgezogene Kurve) als Funktionen der Reynoldszahl nach [Avila et al. \(2011\)](#).

Diese Idee wurde von [Avila et al. \(2011\)](#) mittels Messungen und Simulationen ausgeführt. Das Ergebnis ist in [Abb. 8.52](#) gezeigt. In dem Diagramm sind Meßwerte und numerische Simulationen als Datenpunkte eingetragen. Die mittlere Zerfallszeit (Lebensdauer) eines Puffs wurde hierbei durch

$$\tau = \exp[\exp(0.005556 \times Re - 8.499)] \quad (8.57)$$

approximiert (gestrichelte Kurve). Andererseits wurde die mittlere Zeit zur Erzeugung eines Puffs durch

$$\tau = \exp[\exp(-0.003115 \times Re + 9.161)] \quad (8.58)$$

approximiert (durchgezogene Kurve). Der Schnittpunkt beider Kurven liegt bei $Re_c = 2040 \pm 10$. Dieser ...

Auf der Schneide zur Turbulenz

Edge states [Willis and Kerswell \(2009\)](#) und andere ...