

6. Parallele Scherströmungen

Die Strömung aus Düsen und durch Rohre, die Umströmung schlanker Körper oder diejenige zwischen ebenen Platten ist oft nahezu parallel mit $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(y)$. Daher sind parallele Strömungen von großer grundsätzlicher und auch technischer Bedeutung. Insbesondere ist die Stabilität und die räumliche Entwicklung dieser Strömungen von Interesse. Es zeigt sich, daß diese Strömungen eine Vielzahl unterschiedlicher Instabilitäten aufweisen können. Als ein Beispiel sei hier nur die *Kelvin-Helmholtz-Instabilität* genannt (siehe Abb. 6.1 und Kap. 4.1), bei der sich die anfänglich gleichmäßig in einer Scherschicht verteilte Vortizität im Laufe der Zeit in einer Reihe geradliniger Wirbel mit gleichem Drehsinn konzentriert.

Bei vielen wandbegrenzten Scherströmungen ist die Situation jedoch komplizierter: Zum Beispiel kann die laminare Grundströmung direkt in eine turbulente Strömung *umschlagen*, bevor die Reynoldszahl den kritischen Wert der linearen Theorie erreicht. Die *ebene Couette-Strömung* ist sogar linear stabil für *alle* Reynoldszahlen. Um einen kleinen Einblick über die vielfältigen Phänomene zu erhalten, werden wir im folgenden zunächst einige klassische Resultate für reibungsfreie Strömungen ableiten. Danach werden wir uns viskosen Strömungen zuwenden und schließlich zur Energie-Stabilität kommen.

Die Theorie für reibungsfreie Fluide kann in guter Näherung auf schnelle Strömungen (hohe Reynoldszahl) angewandt werden, wenn feste Ränder weit genug entfernt sind. Ein typisches Beispiel hierfür sind freie Scherströmungen. Im Ge-

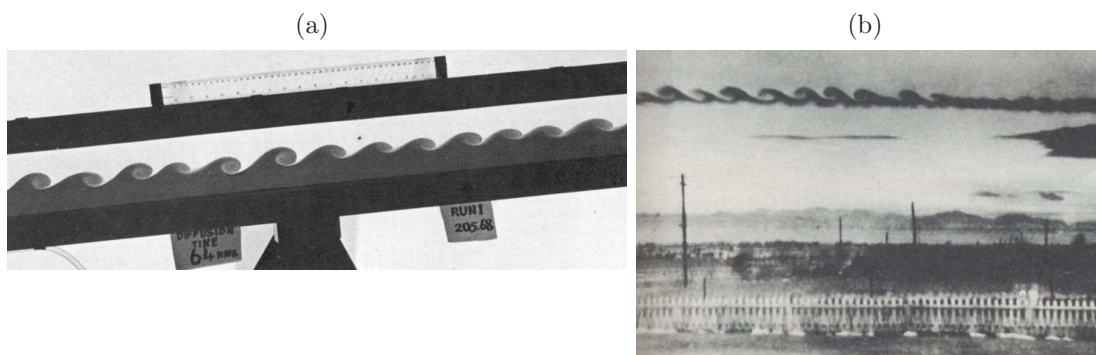


Abbildung 6.1.: Kelvin-Helmholtz-Instabilität einer ebenen Scherschicht; (a) zwischen zwei Schichten unterschiedlicher Dichte (reines Wasser über gefärbtem Salzwasser) im Laborexperiment (nach Van Dyke, 1982) und (b) in der Atmosphäre als Wellenwolke bei Denver (nach Drazin and Reid, 1981). Beachte die Ähnlichkeit der Strukturen mit den Stuart-Wirbeln für Kelvin's Katzenaugen in Abb. 3.4.

gensatz dazu muß für die Beschreibung wandbegrenzter Strömungen, wie z.B. der Poiseuille-Strömung oder auch der Grenzschichtströmung, die Viskosität berücksichtigt werden.

6.1. Reibungsfreie Fluide

6.1.1. Das lineare Stabilitätsproblem

Wir betrachten eine reibungsfreie inkompressible Strömung. Es seien L , V , L/V , und ρV^2 die charakteristischen Skalen für Länge, Geschwindigkeit, Zeit und Druck. Dann können wir die Euler- und Kontinuitätsgleichung entdimensionalisieren, indem wir die neuen Variablen $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/L$, $\mathbf{U}' = \mathbf{U}/V$, $t' = tV/L$ und $P' = P/(\rho V^2)$ einführen. Nach Weglassen des Strichs ergibt sich

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P, \quad (6.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (6.1b)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß jede stationäre parallele Strömung der Form

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U(y)\mathbf{e}_x, \quad P(\mathbf{x}, t) = P = \text{const.} \quad (6.2)$$

eine Lösung der Euler-Gleichungen ist, da der Druckgradient und der nichtlineare Term identisch verschwinden (drucklose Strömung).

Die lineare Stabilität dieser Grundströmung wird bestimmt durch die Gleichungen für infinitesimale Störungen

$$\partial_t \mathbf{u} + U(y)\partial_x \mathbf{u} + v\partial_y U(y)\mathbf{e}_x = -\nabla p, \quad (6.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6.3b)$$

Da dieses lineare Problem invariant ist unter Translationen von x , z und t , können wir die Lösungen als Normalmoden ansetzen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}(y) \\ \hat{p}(y) \end{pmatrix} \exp \{i(k_x x + k_z z - \omega t)\} + \text{c.c.}, \quad (6.4)$$

wobei die Frequenz ω und der Wellenvektor $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z$ im allgemeinen komplex sein können.¹ Die verbleibenden Unbekannten $\hat{\mathbf{u}}(y)$ und $\hat{p}(y)$ sind nur Funktionen der Koordinate y . Es ist nützlich, die komplexe Phasengeschwindigkeit in Stromrichtung als

$$c = \frac{\omega}{k_x} \quad (6.5)$$

¹Bisher (in Kapitel 4) hatten wir nur sogenannte zeitliche Moden betrachtet, wobei $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ und $\omega \in \mathbb{C}$. Die Konsequenzen der Verallgemeinerung auf $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ und $\omega \in \mathbb{C}$ werden in Kap. 9 diskutiert.

zu definieren. Wenn man den Normalmodenansatz (6.4) in die Störungsgleichung (6.3a) einsetzt, erhält man

$$[-i\omega + ik_x U(y)] \hat{\mathbf{u}} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + U'(y) \hat{v} e_x e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} = -\nabla \hat{p} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}, \quad (6.6)$$

oder in Komponenten und zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$$ik_x [U(y) - c] \hat{u} + U'(y) \hat{v} = -ik_x \hat{p}, \quad (6.7a)$$

$$ik_x [U(y) - c] \hat{v} = -\partial_y \hat{p}, \quad (6.7b)$$

$$ik_x [U(y) - c] \hat{w} = -ik_z \hat{p}, \quad (6.7c)$$

$$ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v} + ik_z \hat{w} = 0. \quad (6.7d)$$

Dies kann auch in Matrixform geschrieben werden

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ik_x [U(y) - c] & U'(y) & 0 & ik_x \\ 0 & ik_x [U(y) - c] & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & ik_x [U(y) - c] & ik_z \\ ik_x & \partial_y & ik_z & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}(y) \\ \hat{v}(y) \\ \hat{w}(y) \\ \hat{p}(y) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = 0. \quad (6.8)$$

Wegen der Ableitungen ∂_y in y -Richtung ist dieses System von zweiter Ordnung und wir müssen zwei Randbedingungen angeben. Für ein endliches Gebiet $y_1 \leq y \leq y_2$ in y -Richtung sind dies die üblichen Undurchlässigkeitsbedingungen für ideale Strömungen

$$\hat{v}(y_1) = \hat{v}(y_2) = 0. \quad (6.9)$$

Falls das Gebiet unendlich ausgedehnt ist, müssen die Störungen für $y \rightarrow \pm\infty$ exponentiell verschwinden. Die Gleichungen (6.8)–(6.9) definieren ein Eigenwertproblem: Für gegebenes Geschwindigkeitsprofil $U(y)$ und Wellenzahl \mathbf{k} der Störung sind die Eigenwerte ω (bzw. c) und die zugehörigen Eigenfunktionen $\mathbf{x}(y) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})^T$ zu bestimmen. Dazu müssen wir die Gleichungen bzgl. y integrieren. In der Praxis wird dies durch eine Diskretisierung von (6.8) erreicht. Für eine hinreichende Genauigkeit muß typischerweise ein großes aber endliches algebraisches System für die Unbekannten $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(y_i)$ (Werte an den Gitterpunkten y_i , $i \in [1, N]$) gelöst werden. Eine nicht-triviale Lösung existiert, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet

$$\det \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega; U) = D(\mathbf{k}, \omega; U) = 0. \quad (6.10)$$

Diese Bedingung definiert die *Dispersionsrelation*. Wegen der großen Anzahl N der Unbekannten besitzt das System in der Regel sehr viele Eigenfunktionen (unendlich viele Lösungen für $N \rightarrow \infty$).

6.1.2. Das Squire-Theorem

Um die vier Gleichungen (6.7a)–(6.7d) auf drei Gleichungen zu reduzieren, bilden wir (6.7a) $+(k_z/k_x) \times$ (6.7c) und erhalten

$$[U - c] \underbrace{(ik_x \hat{u} + ik_z \hat{w})}_{:=i\tilde{k}\tilde{u}} + U' \hat{v} = -i \underbrace{\left(k_x + \frac{k_z^2}{k_x}\right)}_{:=\tilde{k}^2/k_x} \underbrace{\hat{p}}_{:=\tilde{p}k_x/\tilde{k}}, \quad (6.11)$$

wobei unter den geschweiften Klammern Definitionen für neue (transformierte) Größen \tilde{u} , \tilde{k} , und \tilde{p} stehen. Es ist $\tilde{k}^2 = k_x^2 + k_z^2$. Unter Verwendung der neuen Größen lautet die Gleichung dann

$$[U - c] i\tilde{k}\tilde{u} + U' \hat{v} = -i\tilde{k}\tilde{p}. \quad (6.12)$$

Diese Gleichung hat **dieselbe Form** wie (6.7a) für die x -Komponente, nur daß k_x durch \tilde{k} ersetzt ist. Auch die Gleichung für die y -Komponente des Impulses (6.7b) bleibt forminvariant, denn die Substitution des Drucks \hat{p} durch $\tilde{p}k_x/\tilde{k}$ führt auch hier zum Wechsel $k_x \rightarrow \tilde{k}$. Schließlich kann die Kontinuitätsgleichung als

$$i\tilde{k}\tilde{u} + \partial_y \hat{v} = 0 \quad (6.13)$$

geschrieben werden.

Diese Schritte kann man in einer sogenannten *Squire-Transformation* (Squire, 1933) zusammenfassen

$$\begin{aligned} \tilde{k}^2 &= k_x^2 + k_z^2, \\ \tilde{k}\tilde{u} &= k_x \hat{u} + k_z \hat{w}, \\ \tilde{p} &= \frac{\tilde{k}}{k_x} \hat{p}, \\ \tilde{v} &= \hat{v}, \\ \tilde{c} &= c. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Das transformierte Gleichungssystem lautet dann

$$i\tilde{k} [U - \tilde{c}] \tilde{u} + U' \tilde{v} = -i\tilde{k}\tilde{p}, \quad (6.15a)$$

$$i\tilde{k} [U - \tilde{c}] \tilde{v} = -\partial_y \tilde{p}, \quad (6.15b)$$

$$i\tilde{k}\tilde{u} + \partial_y \tilde{v} = 0, \quad (6.15c)$$

mit den Randbedingungen $\tilde{v}(y_1) = \tilde{v}(y_2) = 0$. Durch die Squire-Transformation haben wir die Gleichung für \hat{w} in einer Art und Weise eliminiert, daß die *Form* der restlichen Gleichungen unverändert bleibt. Die Transformation liefert daher dasselbe Ergebnis, als wenn wir von vornherein $w = 0$ gesetzt hätten. Aus jeder dreidimensionalen Lösung des Stabilitätsproblems (6.7a)–(6.7d) läßt sich daher durch Anwendung der Squire-Transformation eine zweidimensionale Lösung (6.15a)–(6.15c)

des Problems erhalten. Die so gewonnene zweidimensionale Lösung muß natürlich einer anderen Dispersionsrelation genügen. Sie lautet

$$\tilde{D}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = 0. \quad (6.16)$$

Was kann nun über die Stabilität der beiden korrespondierenden Lösungen gesagt werden? Dazu stellen wir den Zusammenhang zwischen $\tilde{\omega}$ und ω her

$$\tilde{\omega} = \tilde{k}\tilde{c} = \tilde{k}c = \tilde{k}\frac{\omega}{k_x} = \omega\frac{\tilde{k}}{k_x} = \omega\underbrace{\frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_x}}_{\geq 1, \text{ reell}}. \quad (6.17)$$

Wir sehen daran, daß die (positive) Wachstumsrate der zweidimensionalen Normalmode $\tilde{\sigma} = \Im(\tilde{\omega}) \geq \sigma = \Im(\omega)$ größer ist als diejenige der zugehörigen dreidimensionalen Mode.² Damit können wir das **Squire-Theorem** für reibungsfreie parallele Strömungen formulieren:

Für jede dreidimensionale Lösung des linearen Stabilitätsproblems existiert eine zweidimensionale Lösung, die eine größere oder gleichgroße zeitliche Wachstumsrate besitzt (falls diese positiv ist). Daher muß die Mode mit der größten (positiven) Wachstumsrate zweidimensional sein.

6.1.3. Das Wendepunkt-Theorem von Rayleigh

Die Rayleigh-Gleichung

Das Squire-Theorem besagt, daß die gefährlichsten Störungen in reibungsfreien Strömungen zweidimensional sind. Daher ist es sinnvoll, zweidimensionale Störungen $\mathbf{u} = u(x, y, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y$ näher zu untersuchen. Im folgenden werden wir die Stromfunktion verwenden, obwohl die Ergebnisse auch direkt aus (6.15a)–(6.15c) gewonnen werden können.³

²Der letzte Ausdruck in (6.17) ist ≥ 1 und nicht negativ, da wir die Konvention verwenden, daß \tilde{k} dasselbe Vorzeichen besitzt wie k_x . Dies ist erforderlich, damit beide Systeme (das ursprüngliche dreidimensionale System und die Squire-transformierten Gleichungen) denselben Limes für $k_z \rightarrow 0$ besitzen.

³Wenn man die Tilde wegläßt und $u = iv'/k$ mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (6.15c) eliminiert (der Strich deutet hier die Ableitung nach y an), erhalten wir aus (6.15a) und (6.15b)

$$\begin{aligned} -[U - c]v' + U'v &= -ikp, \\ ik[U - c]v &= -p'. \end{aligned}$$

Durch Elimination von p folgt daraus (vgl. (6.28))

$$(-[U - c]v' + U'v)' + k^2[U - c]v = [U - c] \underbrace{(k^2v - v'')}_{-\nabla^2 v} + U''v = 0.$$

6. Parallele Scherströmungen

Sei das gesamte zweidimensionale Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{U}_{\text{ges}}(x, y, t)$ durch die Stromfunktion $\Psi(x, y, t)$ gegeben,

$$\mathbf{U}_{\text{ges}}(x, y, t) = (\partial_y \Psi) \mathbf{e}_x - (\partial_x \Psi) \mathbf{e}_y. \quad (6.18)$$

Dann ist die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt, und die gesamte Vortizität lautet $\boldsymbol{\Omega} = -\nabla^2 \Psi \mathbf{e}_z$. Die Erhaltung der Vortizität entlang der Stromlinien einer idealen Strömung (*Wirbel können nicht entstehen und Wirbel können nicht vergehen*⁴) erfordert⁵

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = [\partial_t + \mathbf{U}_{\text{ges}} \cdot \nabla] \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (6.19)$$

Durch Einsetzen von \mathbf{U}_{ges} erhalten wir

$$[\partial_t + (\partial_y \Psi) \partial_x - (\partial_x \Psi) \partial_y] \nabla^2 \Psi = 0. \quad (6.20)$$

Durch Invertierung von (6.18) kann die Stromfunktion z.B. durch ein Integral über die x -Komponente der Geschwindigkeit ausgedrückt werden. Wenn man $(\mathbf{U}_{\text{ges}})_x = \partial_y \Psi$ verwendet, ergibt sich

$$\Psi(x, y, t) = \int (\mathbf{U}_{\text{ges}})_x dy = \int U(y) dy + \psi(x, y, t), \quad (6.21)$$

wobei die Gesamtströmung in eine Grundströmung $\mathbf{U} = U(y) \mathbf{e}_x$ und eine Störung, ausgedrückt durch die Stromfunktion $\psi(x, y, t)$, zerlegt wurde. Einsetzen von (6.21) in (6.20) und mit Hilfe der Zerlegung

$$\partial_x \Psi = \psi_x, \quad (6.22a)$$

$$\partial_y \Psi = U + \psi_y, \quad (6.22b)$$

$$\nabla^2 \Psi = U' + \nabla^2 \psi, \quad (6.22c)$$

ergibt sich

$$\partial_t \nabla^2 \psi + (U + \psi_y) \partial_x \nabla^2 \psi - \psi_x \underbrace{\partial_y (U' + \nabla^2 \psi)}_{U'' + \nabla^2 \partial_y \psi} = 0. \quad (6.23)$$

Wenn man quadratische Terme in ψ (rot) vernachlässigt (infinitesimale Störungen), gelangen wir zur linearen Störungsgleichung

$$[\partial_t + U \partial_x] \nabla^2 \psi - U'' \psi_x = 0. \quad (6.24)$$

Die Lösungen sind *Normalmoden*

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (6.25)$$

⁴Dirichlets Interpretation des Helmholtzschen Wirbelsatzes.

⁵Dies Ergebnis kann man direkt aus den Eulergleichungen erhalten, wenn man die Rotation bildet und beachtet, daß $\nabla \times (\mathbf{U}_{\text{ges}} \cdot \nabla \mathbf{U}_{\text{ges}}) = \mathbf{U}_{\text{ges}} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{U}_{\text{ges}}$. Für zweidimensionale Strömungen ist $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{U}_{\text{ges}} = 0$.

aus denen die Geschwindigkeitskomponenten der Störung folgen,

$$u(x, y, t) = \phi'(y)e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (6.26a)$$

$$v(x, y, t) = -ik\phi(y)e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (6.26b)$$

Einsetzen des Ansatzes in (6.24) liefert

$$[-\omega + Uk](\phi'' - k^2\phi) - U''k\phi = 0, \quad (6.27)$$

oder

$$\phi'' - k^2\phi - \frac{U''\phi}{U(y) - c} = 0. \quad (6.28)$$

Dies ist die *Rayleigh-Gleichung* für die y -Abhängigkeit der Amplitude ϕ der Störung (in Form einer Welle/Normalmode) einer parallelen reibungsfreien Strömung $U(y)$. Zusammen mit den Randbedingungen $\phi(y_1) = \phi(y_2) = 0$ (*no penetration*) ist (6.28) das oben genannte Eigenwertproblem.

Die lineare Stabilität des Grundströmungsprofils $U(y)$ ist bestimmt durch die zeitliche Mode⁶ mit dem größten Imaginärteil $\Im(\omega) = \Im(kc)$. Falls nun ϕ eine Lösung (Eigenfunktion) der Rayleigh-Gleichung (6.28) ist mit Eigenwert c , dann ist auch ϕ^* eine Lösung mit Eigenwert c^* . Daher sind die Eigenwerte c von (6.28) entweder reell oder konjugiert komplex.⁷ Falls die Eigenwerte c für *alle* k reell sind, ist $\Im(kc) = 0$ und die Strömung ist neutral stabil. Falls dagegen ein komplex konjugiertes Paar $c \neq c^*$ von Eigenwerten existiert, ist die Strömung instabil, und zu jeder stabilen Mode mit $\Im(kc) < 0$ existiert eine instabile Mode mit $\Im(kc^*) > 0$. Dann wird eine der zeitlichen Moden verstärkt, während die andere gedämpft ist.⁸

Das Wendepunkt-Kriterium

Um allgemeine Aussagen über die Stabilität von Geschwindigkeitsprofilen $U(y)$ machen zu können, betrachten wir eine integrale Gleichung, die wir in Real- und Imaginärteil aufspalten. Wenn wir die Rayleigh-Gleichung (6.28) mit ϕ^* multiplizieren und über y integrieren, erhalten wir

$$\int_{y_1}^{y_2} [\phi^* \phi'' - k^2 |\phi|^2] dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{U'' |\phi|^2}{U - c} dy = 0. \quad (6.29)$$

⁶Zeitliche Moden sind durch $k \in \mathbb{R}$ charakterisiert.

⁷Diese Symmetrie gilt nicht für viskose Strömungen.

⁸An dieser Stelle sei auf den allgemeinen Fall hingewiesen, bei dem $k, \omega \in \mathbb{C}$ sind. Dann wird formal auch $y \in \mathbb{C}$ betrachtet. Falls nun für irgendeinen Wert y in der komplexen y -Ebene die Geschwindigkeit $U = c$ wird, ist die Situation komplizierter. Dann verschwindet nämlich der Koeffizient vor dem Term mit der höchsten Ableitung ϕ'' . Obwohl diese Singularität in der komplexen y -Ebene auftritt, beeinflusst sie das Verhalten auf der reellen Achse! Diese Komplikationen werden wir aber, wenn überhaupt, dann erst beim viskosen Fall betrachten (später).