



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

# Numerische Untersuchung einer stationären Solitärwelle in turbulenter nahkritischer Strömung mit freier Oberfläche

Dr.techn. Markus Müllner  
Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

15. Juli 2016

Projekt wird finanziell unterstützt durch  
Androsch International Management Consulting GmbH (AIC)

## 1 Einleitung und Ziel

In einer Arbeit von Schneider [1] über Solitärwellen in turbulenter Strömung wurde gezeigt dass eine Solitärwelle in stationärer turbulenter Strömung nur dann existiert wenn die Oberflächenrauigkeit entlang des Kanalbodens örtlich veränderlich gestaltet wird. Im Gegensatz dazu tritt z. B. ein welliger Wassersprung unter ansonsten gleichen Bedingungen auch bei konstanter Bodenrauigkeit auf [2, 3]. Für den einfachen Fall einer entlang eines Streifens um eine Konstante veränderten Bodenrauigkeit ist für die Existenz der Solitärwelle eine bestimmte minimale Erhöhung der Bodenrauigkeit notwendig [4]. Vor Kurzem hat unser Kooperationspartner an der Nihon Universität Tokio Experimente in einem Wasserkanal durchgeführt [5], die die Existenz der vorhergesagten Solitärwelle über einem Streifen mit erhöhter Bodenrauigkeit bestätigen.

In der asymptotischen Analyse [1] wird vorausgesetzt dass die untersuchten Solitärwellen flach und lang sind. Weiters werden zwei unabhängige Entwicklungsparameter in geschickter Weise so aneinander gekoppelt, dass keine Turbulenzmodellierung erforderlich ist. Diese beiden Annahmen stimmen aber nicht notwendigerweise mit den experimentellen Bedingungen überein.

Ziel des Projekts ist daher die Aufgabenstellung mithilfe von RANS-Gleichungen in einem CFD-Programm (FLUENT<sup>®</sup>) zu lösen und dabei u. a. den Einfluss unterschiedlicher Turbulenzmodelle zu untersuchen. Zur Bestimmung der Oberfläche wird eine Iterationsmethode eingesetzt, in der die um veränderlichen Oberflächendruck erweiterte asymptotische Gleichung [6] in Korrekturschritten zum Auffinden der Wellenform im CFD-Programm verwendet wird.

## 2 Problembeschreibung

Die untersuchte Problemstellung ist in Abb. 1 skizziert.

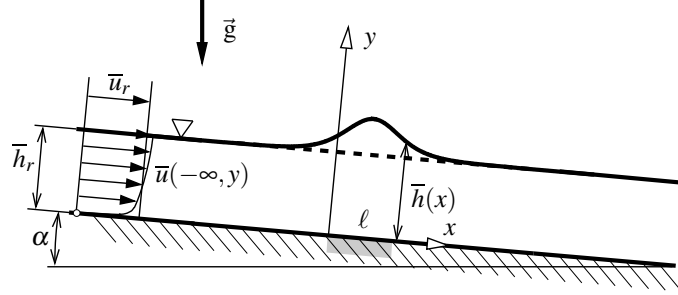


Abbildung 1: Stationäre Solitärwelle in turbulenter Kanalströmung, folglich [5]: Vollausbildete Strömung stromaufwärts und stromabwärts. Bereich mit erhöhter Oberflächenrauigkeit  $0 < x < \ell$  des Kanalbodens (graue Box). Querstriche kennzeichnen Ensemble-Mittelwerte. Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung  $\bar{u}(x, y)$  und Wellenhöhe  $\bar{h}(x)$ .

Schneider [1] führte eine Analyse des Problems durch für leicht überkritische Zuströmung (Froudezahl knapp über 1) und sehr große Reynoldszahl:

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}_r}{\sqrt{g\bar{h}_r}} = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon, \quad (1)$$

$$\text{Re}_\tau = \bar{u}_{\tau r} \bar{h}_r / \nu. \quad (2)$$

Der Index  $r$  kennzeichnet den Referenzzustand bei der Zuströmung. Die Zuströmgeschwindigkeit wird aus dem Volumenstrom berechnet,  $\bar{u}_r = \dot{V} / \bar{h}_r$ .  $g$  ist die Erdbeschleunigung,  $\bar{u}_\tau$  die Schubspannungsgeschwindigkeit am Kanalboden,  $\nu$  die kinematische Zähigkeit des Fluids. Aus der Annahme kleiner Kanalneigung  $\alpha \ll 1$  ergibt sich  $\ln \text{Re}_\tau \gg 1$ . Weiters erhält man unter der Annahme vollausbildeter Strömung stromaufwärts und stromabwärts

$$\bar{u}_{\tau r} = \sqrt{g\alpha\bar{h}_r}. \quad (3)$$

### 2.1 Asymptotische Analyse

In einer asymptotischen Analyse [1] wurde eine Entwicklung nach dem Parameter  $\varepsilon$  durchgeführt:

$$\bar{h} / \bar{h}_r = 1 + \varepsilon H_1(X) + \dots. \quad (4)$$

Solitärwellen sind lange Wellen, daher wird in  $x$ -Richtung folgende Koordinatenstreckung durchgeführt:

$$X = 3\sqrt{\varepsilon}x / \bar{h}_r, \quad Y = y / \bar{h}_r. \quad (5)$$

Die in den Impulsgleichungen auftretenden Reynoldsspannungen müssen im allgemeinen modelliert werden. Bemerkenswerterweise ist keine Turbulenzmodellierung notwendig, wenn die Größenordnungen von Kanalneigung und Überkritizitätssparameter wie folgt gekoppelt werden:

$$\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6)$$

Aus einer Lösungsbedingung ergibt sich dann die folgende, erweiterte Korteweg–de-Vries Gleichung für die dimensionslose Oberflächenerhöhung  $H_1$ :

$$\boxed{H_1''' + (H_1 - 1) H_1' = \beta(H_1 - \Gamma_L \varphi)} \quad (7)$$

mit dem Dissipationsparameter

$$\beta = (1/3) \alpha \varepsilon^{-3/2} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \quad (8)$$

und den Randbedingungen

$$H_1 \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad X \rightarrow \pm\infty. \quad (9)$$

In Gl. (7) bezeichnet  $' = d/(dX)$ . Die Veränderung der Oberflächenrauigkeit entlang des Kanalbodens ist durch den Term  $\Gamma_L \varphi(X)$  representiert [1, 5]:

$$\Gamma_L = \frac{1}{3\varepsilon} \frac{c_f - c_{fr}}{c_{fr}} > 0, \quad \varphi(X) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 < X < L = 3\sqrt{\varepsilon}\ell/\bar{h}_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

wobei  $c_f$  und  $c_{fr}$  die Bodenreibungskoeffizienten im Gebiet mit erhöhter Rauigkeit bzw. im Referenzzustand sind.

## 2.2 Entwicklung für schwache Dissipation

Gl. (7) wurde zusammen mit Gl. (9) numerisch gelöst [7]. Allerdings ist wegen  $\varepsilon \ll 1$  der Dissipationsparameter  $\beta$  in Gl. (8) in praktischen Fällen ebenfalls klein gegen 1. Daher wird alternativ zum numerischen Lösungsverfahren die rechte Seite in Gl. (7) als Störterm betrachtet und  $H_1$  für kleine Werte von  $\beta$  entwickelt [1]:

$$H_1(X; \beta) = H_1^{(0)} + \beta H_1^{(1)} + \dots \quad (11)$$

In führender Ordnung erhält man die klassische Soliton-Lösung der reibungsfreien Strömung [1]:

$$H_1^{(0)} = 3 \operatorname{sech}^2 \left[ \left( X - X_m^{(0)} \right) / 2 \right], \quad (12)$$

wobei sich die Position des Wellenbergs  $X_m^{(0)}$  nur im Fall turbulenter Strömung bestimmen lässt. Dies erfordert die Zuhilfenahme der veränderlichen Bodenreibung [4]:

$$X_m^{(0)} = \frac{L}{2} \left( \bar{\pm} \right) \operatorname{arcosh} \left( \frac{\Gamma_L}{2} \sinh \frac{L}{2} - \cosh \frac{L}{2} \right). \quad (13)$$

Im Experiment ist  $\varepsilon = 0.0433$ . Das Verhältnis der Bodenreibungskoeffizienten beträgt etwa  $c_f/c_{fr} = 1.50$ , siehe [5]. Daraus ergibt sich mit Gl. (10)  $\Gamma_L = 3.86$ . Ein Vergleich der Lösungen von Gl. (7) mit dem Experiment ist in Abb. 2 dargestellt.

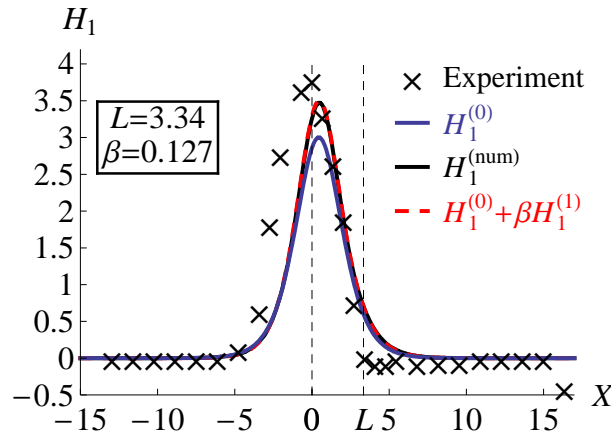


Abbildung 2: Vergleich der Oberflächenform in Messung und Theorie, folglich [5]:  $H_1^{(0)}$  aus Gl. (12, 13).  $H_1^{(\text{num})}$  ist die numerische Lösung von Gl. (7).  $H_1^{(0)} + \beta H_1^{(1)}$  nach Gl. (11).  $\Gamma_L = 3.86$ .

Die Lösung aus der Entwicklung Gl. (11) passt sehr gut mit der numerischen Lösung von Gl. (7) zusammen. Die Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit dem Experiment ist zufriedenstellend.

### 3 CFD mit FLUENT<sup>®</sup>

Zur Berechnung der Problemstellung mithilfe eines CFD Programms wird FLUENT 6.3.26 am CAE Cluster der TU Wien verwendet.

#### 3.1 Gitter und Randbedingungen an der freien Oberfläche

Es gibt unterschiedliche numerische Ansätze zur Beschreibung freier Ränder. Unter jenen numerischen Methoden die Gitter verwenden wird im Wesentlichen zwischen “interface tracking“ und “interface capturing“ unterschieden. Hier wird “interface tracking“ verwendet, bei dem das Gitter entlang der freien Oberfläche gelegt wird. Zur Erfüllung der Randbedingungen an der Oberfläche wird vom Druck der hydrostatische Anteil abgezogen. An der freien Oberfläche kann dann “lokale Symmetrie“ als Randbedingung gewählt werden. Damit ist dort die Rutschbedingung erfüllt. Jedoch stimmt der Druck an der Oberfläche nicht notwendigerweise mit der geforderten Druckrandbedingung überein. Um dies zu gewährleisten wird die Position der Oberfläche mithilfe einer im nächsten Kapitel beschriebenen Iterationsroutine bestimmt. Das Gitter wird mithilfe von “Dynamic Mesh“ in einer User-Defined Function (UDF) in die jeweilige Position geschoben.

#### 3.2 RANS-Gleichungen

Als Approximation der turbulenten Strömung werden die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen gelöst. Als Turbulenzmodelle werden unterschiedliche Zweigleichungsmodelle bzw. das Reynoldsspannungsmodell (RSM) verwendet.

### 3.3 Vollausbildete Strömung

In der Problemstellung wird vollausbildete Zuströmung vorausgesetzt, siehe Abb. 1. Um mit dem CFD-Programm vollausbildete Strömung zu erreichen muss die Kanalneigung  $\alpha$  in Abhängigkeit vom Turbulenzmodell ermittelt werden. Froudezahl und Reynoldszahl werden wie im Experiment gewählt. Hierzu wird die Wasserhöhe konstant  $\bar{h} = \bar{h}_r$  gesetzt. Am Einlass wird ein konstantes Geschwindigkeitsprofil vorgegeben. An der Oberfläche werden die in Abschn. (3.1) beschriebenen Randbedingungen verwendet. Nun wird die Kanalneigung  $\alpha$  entsprechend variiert, bis bei langer Fließstrecke der Druck entlang der Oberfläche konstant wird und sich das Geschwindigkeitsprofil nicht mehr ändert. Für  $\varepsilon = 0.0433$  erhält man mit dem k- $\varepsilon$ -Standardmodell  $\alpha = 1/502$ . Aus Gl. (8) folgt  $\beta = 0.0736$ . Die Profile für Geschwindigkeit,  $k$  und  $\varepsilon$  werden als Einlassrandbedingung für die Problemstellung zur Ermittlung der Solitärwelle verwendet.

## 4 Iterationsroutine

### 4.1 Gleichung für veränderlichen Oberflächendruck $p_S(x)$

Um eine Iterationsroutine zu generieren wurde die in Abschn. (2.1) beschriebene asymptotische Analyse um einen veränderlichen Oberflächendruck erweitert [6]. Wir bezeichnen mit  $p_S$  den Druck an der Oberfläche  $y = \bar{h}_r$ . Der dimensionslose Druck sei

$$P_S = p_S / (g\rho\bar{h}_r). \quad (14)$$

Hier ist  $\rho$  die Dichte des Fluids. An der Oberfläche wird ein Druck in der Ordnung  $\varepsilon^2$  zugelassen:

$$P_S = \varepsilon^2 P_{S2}. \quad (15)$$

Dann ergibt sich aus einer Lösbarkeitsbeziehung eine um den veränderlichen Oberflächendruck erweiterte Gl. (7):

$$H_1'''' + (H_1 - 1) H_1' = \beta(H_1 - \Gamma_L \varphi) - \frac{1}{3} P_{S2}'. \quad (16)$$

Diese Gleichung zusammen mit Gl. (9) wird mit einem 2. Ordnung Finite-Differenzen-Verfahren gelöst. Die Lösung wird in der Iterationsroutine verwendet. Wir bezeichnen die Schritte innerhalb der Schleife mit dem hochgestellten Index  $[i]$ . Der Start der Iterationsschleife  $i = 1$  erfolgt mit der Lösung  $H_1$  aus der asymptotischen Analyse. Hierzu werden Gl. (16, 9) für  $P_{S2} = 0$  gelöst. Man setzt dann

$$H_1^{[1]} = H_1. \quad (17)$$

Aus Gl. (4) ergibt sich der Verlauf der dimensionsbehafteten Wasserhöhe  $\bar{h}(x)$ . Dieser Oberflächenverlauf wird im CFD-Programm vorgeschrieben. In Folge werden die vollen RANS-Gleichungen gelöst. Der Oberflächendruck  $p_S(x)$  wird ausgelesen. Mit Gl. (14, 15) und Gl. (5) erhält man den dimensionslosen Oberflächendruck  $P_{S2}(X)$ . Damit werden erneut Gl. (16, 9) nach  $H_1$  gelöst. Ist die neue Lösung noch nicht genau genug, so wird  $i = i + 1$  gesetzt und folgende Korrektur verwendet [6]:

$$H_1^{[i]} = H_1^{[i-1]} + \Delta \quad \text{mit} \quad \Delta = H_1^{[1]} - H_1. \quad (18)$$

Wenn die Korrekturfolge konvergiert, also  $\Delta = 0$  wird, ist auch gewährleistet dass  $P_{S2} = 0$  ist. Die Iterationsschleife ist im Flussdiagramm Abb. 3 dargestellt.

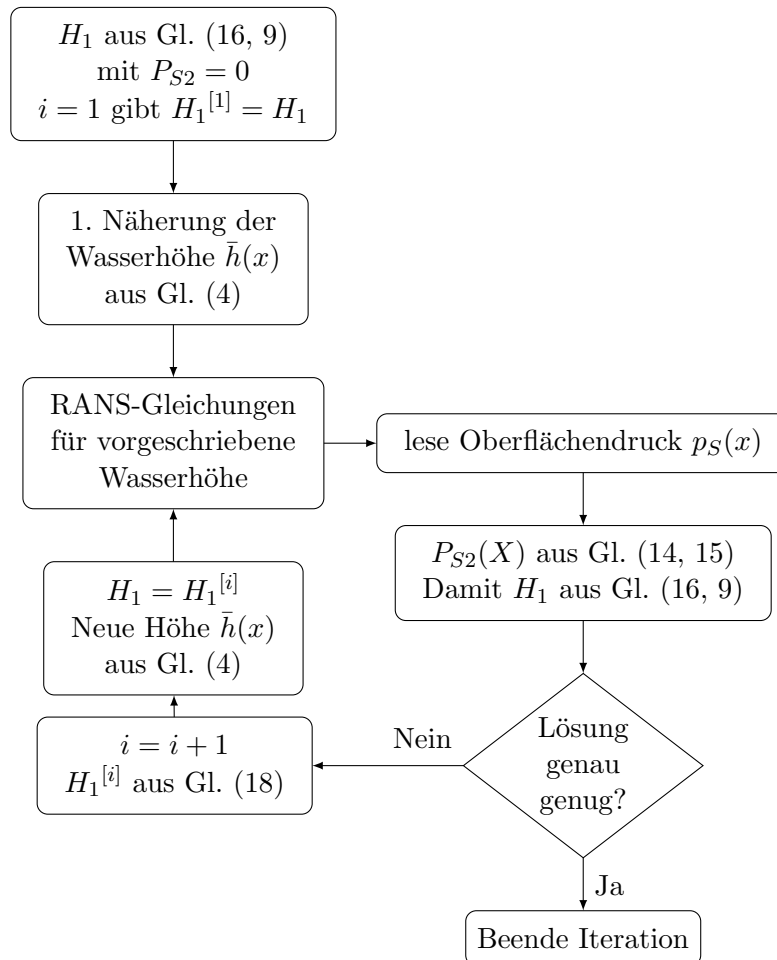


Abbildung 3: Flussdiagramm der Iterationsroutine.

## 5 Ergebnisse

Als Turbulenzmodell sei beispielhaft das  $k$ - $\epsilon$ -Standardmodell ausgewählt. Die Referenzbodenrauigkeit und die erhöhte Bodenrauigkeit wurden mit  $k_r = 50 \mu m$  bzw.  $k = 500 \mu m$  abgeschätzt [5]. In Abb. 4 ist ein Vergleich der asymptotischen Lösungen mit einem vorläufigen CFD-Ergebnis dargestellt.

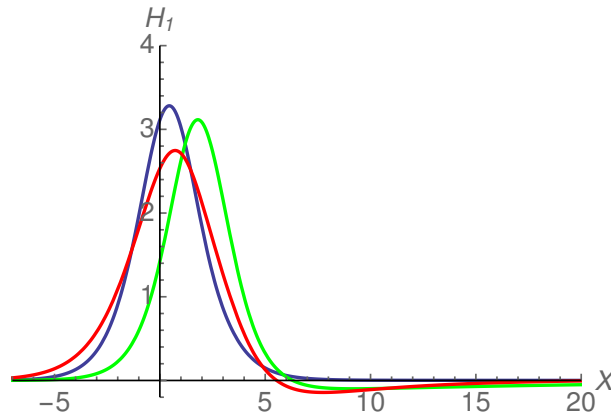


Abbildung 4: Vergleich der Oberflächenerhöhung  $H_1$  der asymptotischen Lösung mit der RANS-Lösung: Asymptotische Lösung  $H_1^{[1]}$  nach Gl. (17) für  $\Gamma_L = 3.86$ . Rote Kurve:  $k$ - $\epsilon$  Standardmodell mit FLUENT<sup>®</sup> für  $\alpha = 1/502$ . Grüne Kurve:  $H_1^{[1]}$  mit verringerter Rauigkeitserhöhung  $\Gamma_L = 2.95$ .  $\epsilon = 0.0433$ .

In der RANS-Lösung tritt ein Wellental auf. Aus der asymptotischen Analyse ist bekannt dass ein Wellental auftritt wenn die Erhöhung der Rauigkeit kleiner als der Eigenwert gewählt wird [4]. Daher ist in Abb. 4 auch der Vergleich mit einer geringer angenommenen Rauigkeitserhöhung  $\Gamma_L = 2.95$  dargestellt. Weitere Untersuchungen und Rechnungen sind nötig. Interessant ist insbesondere ein Vergleich der Ergebnisse mit unterschiedlichen Turbulenzmodellen.

## Literatur

- [1] W. Schneider. *Solitary waves in turbulent open-channel flow*, JFM 726, 137–159 (2013)
- [2] W. Grillhofer, *Der wellige Wassersprung in einer turbulenten Kanalströmung mit freier Oberfläche*, Dissertation, TU Wien (2002)
- [3] R. Jurisits, *Wellige Wassersprünge bei nicht voll ausgebildeter turbulenter Zuströmung*, Dissertation, TU Wien (2012)
- [4] M. Müllner, W. Schneider, *Asymptotic solutions of an extended Korteweg–de Vries equation describing solitary waves with weak or strong downstream decay in turbulent open-channel flow*; PAMM 15, 491–492 (2015)
- [5] W. Schneider, Y. Yasuda. *Stationary solitary waves in turbulent open-channel flow – Analysis and experimental verification*, J. Hydr. Eng. 142/1:04015035 (2016)
- [6] W. Schneider, R. Jurisits, YS. Bae. *An asymptotic iteration method for the numerical analysis of near-critical free-surface flows*, Int. J. of Heat and Fluid Flow 31, 1119–1124 (2010)
- [7] R. Jurisits. *Numerical solutions of an extended Korteweg–de Vries equation describing solitary waves in turbulent open-channel flow*, PAMM 14, 701–702 (2014)