# 28 Biot-Savart für einen geraden, unendlich langen Wirbelfaden

Betrachten Sie einen geraden, unendlich langen Wirbelfaden auf der $y$-Achse. Außerhalb des Wirbelfadens verschwindet die Vortizität. Die Strömung ist stationär, inkompressibel und reibungsfrei.

- Da sich der Wirbelfaden über die gesamte $y$-Achse erstreckt, erzeugt er ein ebenes Geschwindigkeitsfeld, das nicht von $y$ abhängt. Schreiben Sie die Geschwindigkeiten $(u(x,z), v(x,z), w(x,z))$ an. Beachten Sie dabei, dass die Zirkulation $\Gamma$, so wie sie in der Skizze eingezeichnet ist, positiv definiert ist.

- Berechnen Sie nun die Geschwindigkeiten $(u(x,z), v(x,z), w(x,z))$ auch mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes für einen Wirbelfaden:

$$\vec{u}(\vec{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

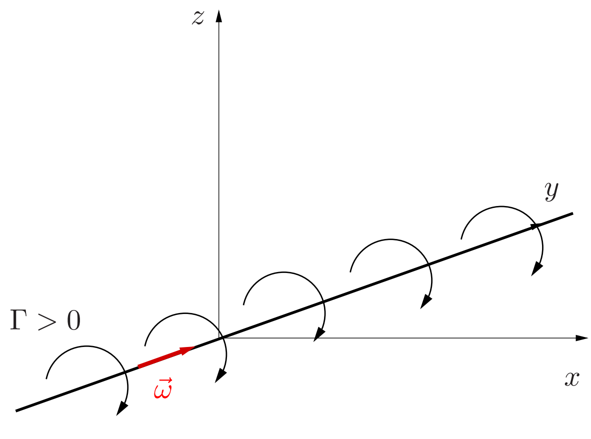
  Dabei bezeichnet $d\vec{r}\,'$ ein Linienelement auf dem Wirbelfaden in Richtung von $\vec{\omega}$ und $\vec{r}\,'$ den Ortsvektor eines Punktes auf dem Wirbelfaden, der von einem zu wählenden Kurvenparameter $t$ abhängt. Es gilt daher

$$d\vec{r}\,(t)' = \frac{d\vec{r}\,(t)'}{dt}dt,$$

  und die Integrationsrichtung ist so zu wählen, dass die Kurve in Richtung von $\vec{\omega}$ durchlaufen wird. Ob der Kurvenparameter dabei ab- oder zunimmt, ist unerheblich, die Integrationsrichtung ist wichtig.

  *Hinweis:*

$$\int \frac{d\xi}{(a^2+\xi^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2\sqrt{a^2+\xi^2}}$$

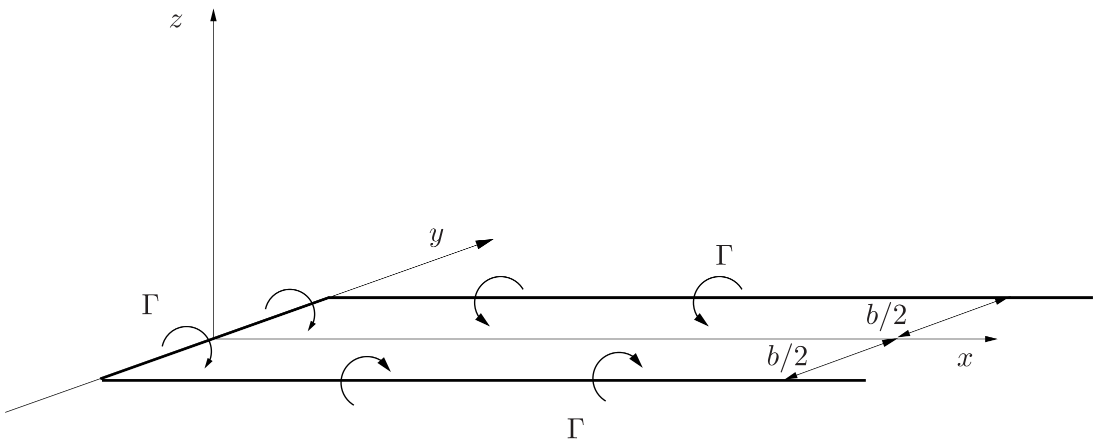


# 29 Induzierte Geschwindigkeiten eines Hufeisenwirbels

Als einfaches Modell eines Tragflügels endlicher Breite soll ein Hufeisenwirbel betrachtet werden. Der Hufeisenwirbel setzt sich aus 3 geraden Wirbelfäden zusammen: ein Wirbelfaden der Länge $b$ auf der $y$-Achse mit $b/2 \leq y \leq b/2$ und zwei halbunendliche Wirbelfäden bei $y = \pm b/2, z = 0$ mit $x \geq 0$ (siehe Skizze).

Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{x})$ durch Überlagerung der Geschwindigkeitsfelder die von den einzelnen Wirbelfäden erzeugt werden. Wie sieht $\vec{u}$ auf der $x$-Achse aus?

Beachten Sie aber wiederum, dass in der Formel von Biot-Savart die Integrationsrichtung in Richtung von $\vec{\omega}$ definiert ist.




# 30 Inkompressible Strömung über eine wellige Wand 2

Zurück zu ebenen Strömungen. Wie in Bsp. 27 sind die Geschwindigkeitsstörungen einer stationären, inkompressiblen, drehungsfreien, ebenen Strömung über eine wellige Wand im gesamten Halbraum $y \geq 0$ gesucht. Die Wand ist nun jedoch durch

$$y_d(x) = \tau \sin(2\pi x), \quad \tau \ll 1$$

gegeben.

Bei der Methode der Singularitätenbelegung wurden bekannte Lösungen (Quelle/Senke) der Gleichungen $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ und $\partial u/\partial y - \partial v/\partial x = 0$ so überlagert, dass die Geschwindigkeit $\vec{u}$ tangential an die Wand ist. Für $\tau \ll 1$ lässt sich diese Bedingung in erster Näherung als $\chi_{1d,y}(x, 0^+) = h'_d(x)$ schreiben.

Hier wird nun ein anderer Lösungsweg gewählt:

- Mit Einführen des Geschwindigkeitspotentials $\phi$, $u = \partial\phi/\partial x, v = \partial\phi/\partial y$ ist $\vec{u}$ automatisch drehungsfrei. Welche partielle Differentialgleichung folgt dann aus $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ für das Geschwindigkeitspotential $\phi$ (bzw. für das Störpotential $\chi_{1d}$)?

- Lösen Sie diese Gleichung mit den Randbedingungen $\chi_{1d,y}(x, 0^+) = h'_d(x)$ und $\lim_{y\to\infty} \chi_{1d,y}(x, y) = 0$ mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen.

*Hinweis:* Bei der Methode der Separation der Variablen macht man den Ansatz $\chi_{1d}(x, y) = X(x)Y(y)$ und setzt diesen in die partielle Differentialgleichung ein. Nach Umformen "zerfällt" diese in je eine gewöhnliche Differentialgleichung für $X(x)$ und $Y(y)$, die man leicht lösen kann. Auftretende Konstanten werden unter Verwendung der Randbedingungen bestimmt.