

5. Nichtlineare Effekte bei Überschallströmung

5.1. Schiefer Verdichtungsstoß

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß die Neigung der Machlinien im Fall schwach gestörter Parallelströmung nur von der Anströmmachzahl M_∞ abhängig ist. Die Machlinien werden nicht von der Profilform beeinflusst (lineare Theorie). Bei einer starken Umlenkung der Überschallströmung treten jedoch nichtlineare Effekte auf. Wird die Strömung an einer konkaven Ecke um den Strömungswinkel ϑ umgelenkt, so bildet sich von der Ecke her ein schiefer Verdichtungsstoß unter dem Stoßwinkel γ im Strömungsfeld aus. Hinter dem Verdichtungsstoß sind die Machlinien unter einem Winkel $\hat{\alpha} \neq \alpha$ geneigt (Abb. 5.1).

Um die Feldgrößen vor und nach dem schiefen Verdichtungsstoß miteinander in Beziehung setzen zu können, benutzen wir die Eigenschaft, daß die Tangentialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit über den Stoß hinweg stetig ist, das heißt daß $v_t = \hat{v}_t$ ist. Demnach kann man sich einen schiefen Verdichtungsstoß dadurch zustande gekommen vorstellen, daß man einen senkrechten Stoß von einem Koordinatensystem aus betrachtet, das sich gegenüber dem ursprünglichen mit v_t in der Stoßebene bewegt (Galileitransformation der Stoßbeziehungen für den senkrechten Verdichtungsstoß). Folglich können die entsprechenden Ergebnisse für den senkrechten Verdichtungsstoß aus der Grundlagen-Vorlesung hier sofort verwendet werden, wenn man berücksichtigt, daß diese im Fall des schiefen Stoßes für die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit gelten (Abb. 5.2). Die Normalkomponente

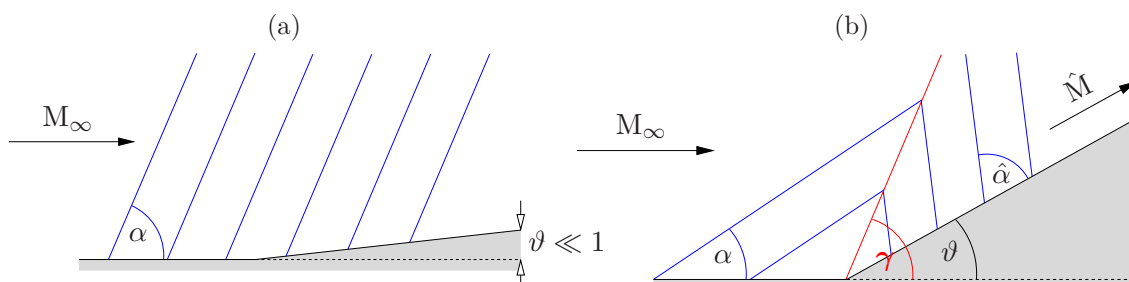


Abbildung 5.1.: Machlinien (blau) und schiefer Verdichtungsstoß (rot) im Rahmen der linearen Theorie für kleine Störungen (a) und im Rahmen der nichtlinearen Theorie für große Störung (b).

5. Nichtlineare Effekte bei Überschallströmung

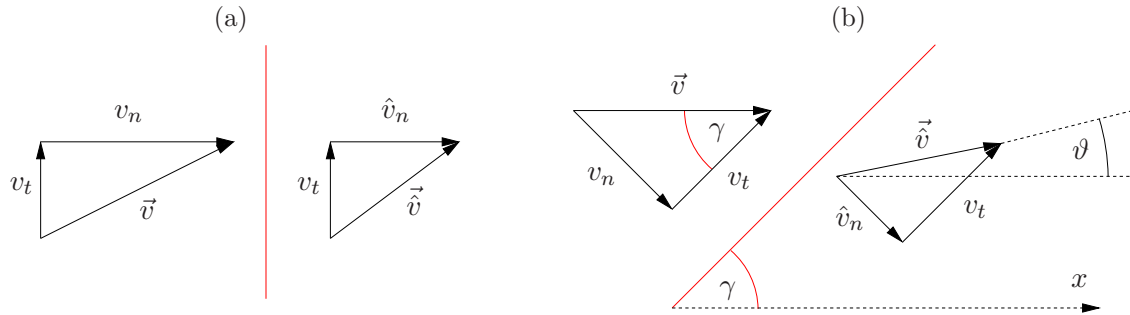


Abbildung 5.2.: Zerlegung der Geschwindigkeiten bei einem schiefen Stoß in Komponenten normal und senkrecht zur Stoßebene. (a): In einem Koordinatensystem, in dem der Stoß senkrecht auf der x -Achse steht und (b) in einem Koordinatensystem, in dem die Anströmrichtung \vec{v} parallel zur x -Achse ist.

berechnet sich über den *Stoßwinkel* γ aus

$$M_n = \frac{v_n}{c} = \frac{v}{c} \sin \gamma = M \sin \gamma, \quad (5.1)$$

es ist daher in den Gleichungen für den senkrechten Stoß die Machzahl M durch $M_n = M \sin \gamma$ zu ersetzen, um die für den schiefen Verdichtungsstoß gültigen Gleichungen (für ideale Gase) zu erhalten¹²

$$\frac{\rho}{\hat{\rho}} = \frac{\hat{v}_n}{v_n} = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{1}{M^2 \sin^2 \gamma} \right), \quad (5.2a)$$

$$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 \sin^2 \gamma - 1), \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}}{T} &= \frac{\hat{p}}{p} \frac{\rho}{\hat{\rho}} \stackrel{c^2 = \kappa RT}{=} \frac{\hat{c}^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{M^2 \sin^2 \gamma} \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 \sin^2 \gamma - 1) \right] \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 \sin^2 \gamma - 1) \right], \end{aligned} \quad (5.2c)$$

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{\hat{\rho}_0}{\rho_0} = \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 \sin^2 \gamma - 1) \right]^{-\frac{1}{\kappa - 1}} \left[1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{1}{M^2 \sin^2 \gamma} \right) \right]^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (5.2d)$$

$$\frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \frac{\hat{p}}{p} - \kappa \ln \frac{\hat{\rho}}{\rho}. \quad (5.2e)$$

Ein senkrechter Verdichtungsstoß kann nur in einer Überschallströmung existieren. Auf den schiefen Stoß übertragen gilt daher

$$M \sin \gamma > 1. \quad (5.3)$$

¹In (5.2e) war im alten Skriptum ein '+' vor dem zweiten Term.

²Gleichung (5.2d) sind p_0 und ρ_0 die Ruhegrößen.

Dies schränkt den Stoßwinkel γ auf den Wertebereich ein

$$\arcsin\left(\frac{1}{M}\right) < \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (5.4)$$

Die untere Grenze ($\gamma = \arcsin M^{-1}$) ergibt mit (5.2a) einen Stoß verschwindender Stärke, er geht in eine Machlinie mit $\gamma = \alpha$ über. Die obere Grenze ($\gamma = \pi/2$) ergibt den Stoß mit dem größtmöglichen Druckanstieg, entsprechend dem senkrechten Verdichtungsstoß.

Benutzt man die erste Beziehung (5.2a) und den Energiesatz,³ dann erhält man

$$\begin{aligned} v_n \hat{v}_n &= v_n^2 \frac{\hat{v}_n}{v_n} \stackrel{(5.2a)}{=} \underbrace{\frac{v_n^2}{M^2 \sin^2 \gamma}}_{=c^2} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \underbrace{M^2 \sin^2 \gamma}_{v_n^2/c^2} + \frac{2}{\kappa+1} \right) \\ &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_n^2 + \frac{2}{\kappa+1} c^2 + \underbrace{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_t^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_t^2}_{=0} \stackrel{\text{Energiesatz}}{=} c^{*2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_t^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es gilt also die *Prandtl-Relation*

$$v_n \hat{v}_n + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_t^2 = c^{*2}, \quad (5.6)$$

welche eine Verallgemeinerung der Prandtl-Relation $v\hat{v} = c^{*2}$ für den senkrechten Verdichtungsstoß ist.

Legt man den schiefen Verdichtungsstoß so in ein Koordinatensystem, daß die Anströmrichtung mit der x -Richtung zusammenfällt, gelten die Beziehungen (siehe Abb. 5.3)⁴

$$v_n = u \sin \gamma, \quad (5.7a)$$

$$v_t = u \cos \gamma \stackrel{(*)}{=} \hat{u} \cos \gamma + \hat{v} \sin \gamma, \quad (5.7b)$$

$$\hat{v}_n = v_n - \frac{\hat{v}}{\cos \gamma}, \quad (5.7c)$$

$$\tan \gamma = \frac{u - \hat{u}}{\hat{v}}. \quad (5.7d)$$

³Der Energiesatz lautet (Vergleich zu Energie im kritischen Zustand)

$$\frac{v_n^2 + v_t^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa-1} = \frac{c^{*2}}{2} + \frac{c^{*2}}{\kappa-1} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c^{*2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (v_n^2 + v_t^2) + \frac{2}{\kappa+1} c^2 = c^{*2}.$$

⁴Die Relation (*) in (5.7b) gilt wegen $u = \hat{u} + \hat{v} \tan \gamma$.

5. Nichtlineare Effekte bei Überschallströmung

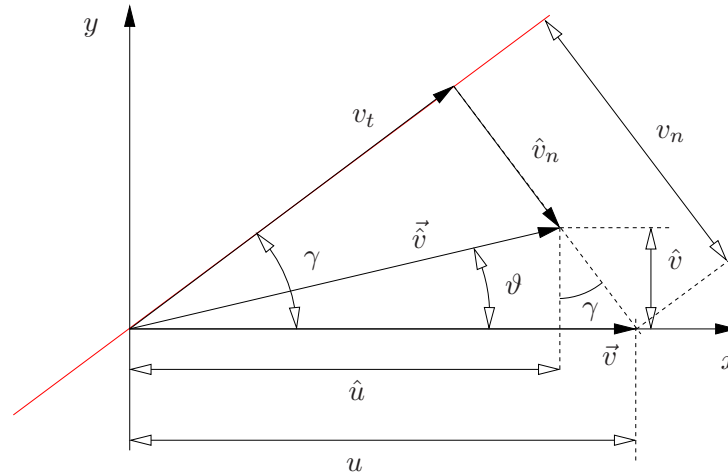


Abbildung 5.3.: Verschiedene Zerlegungen der Geschwindigkeitsvektoren. Hierbei sind \vec{v} und $\vec{\hat{v}}$ die Geschwindigkeitsvektoren vor und nach dem Stoß. Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in x und y -Richtung nach dem Stoß lauten \hat{u} und \hat{v} .

Wenn man v_n , v_t und \hat{v}_n aus (5.7) in die Prandtl-Relation (5.6) einsetzt, erhält man

$$u \sin \gamma \left(u \sin \gamma - \frac{\hat{v}}{\cos \gamma} \right) = c^{*2} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (\hat{u} \cos \gamma + \hat{v} \sin \gamma)^2. \quad (5.8)$$

Benutzt man (5.7d), dann erhält man nach einigen Umformungen die sogenannte *Stoßpolare*⁵



Adolf Busemann
1901–1986

$$\left(\frac{\hat{v}}{c^*} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{\kappa + 1} \left(\frac{u}{c^*} \right)^2 - \frac{u\hat{u}}{c^{*2}} \right] = \left[\frac{u\hat{u}}{c^{*2}} - 1 \right] \left[\frac{u}{c^*} - \frac{\hat{u}}{c^*} \right]^2.$$

(5.9)

Stoßpolaren wurden zuerst von Busemann eingeführt. Eine Stoßpolare ist eine Kurve in der Ebene der normierten Geschwindigkeitskomponenten \hat{u}/c^* und \hat{v}/c^* . Eine Polare spezifiziert die möglichen Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß für gegebene Bedingungen vor dem Stoß. Hierbei fungiert die Anströmgeschwindigkeit u als ein Parameter. Der normierte Parameter ist die Machzahl $M^* = u/c^*$. Die Gesamtheit der Polaren für alle Machzahlen ergibt eine Kurvenschar. Diese Ebene $(\hat{u}/c^*, \hat{v}/c^*)$ nennt man auch *Hodographenebene*. Die Polare ist eine Strophoide.⁶

⁵Alternativ zu (5.7) kann man auch die Gleichungen

$$\frac{v_t}{v_n} = \frac{\hat{v}}{u - \hat{u}}, \quad \frac{v_t}{u} = \frac{\hat{v}}{v_n - \hat{v}_n}, \quad u^2 = v_n^2 + v_t^2, \quad \hat{v}^2 = \hat{v}_n^2 + v_t^2.$$

verwenden, die sich aus ähnlichen Dreiecken in Abb. 5.3 ergeben.

⁶Eine Strophoide in der (x, y) -Ebene genügt der Gleichung $(a + x)x^2 - (a - x)y^2 = 0$.

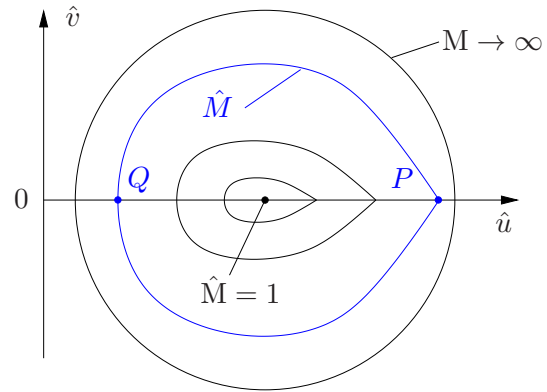


Abbildung 5.4.: Form der Polaren in der Hodgraphenebene (qualitativ).

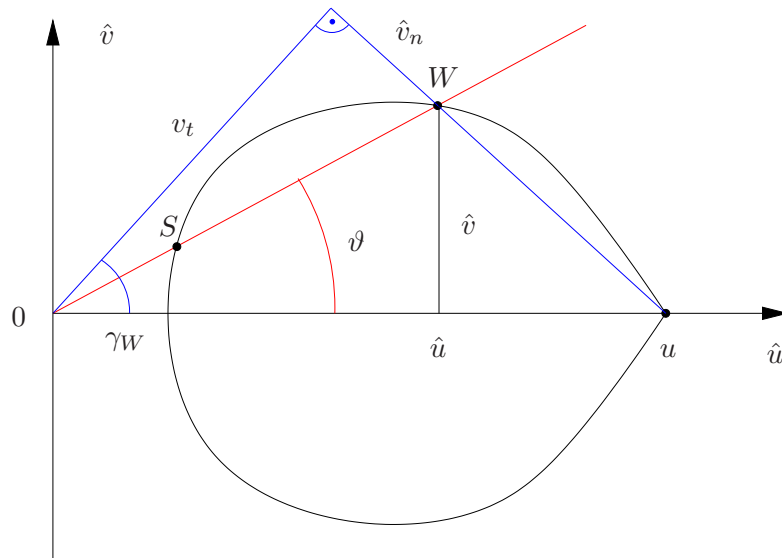


Abbildung 5.5.: Die Schnittpunkte von $\hat{v} = \hat{u} \tan \vartheta$ (rot) mit der Polaren (schwarz) ergeben die beiden Lösungen für den schwachen (W) und für den starken Stoß (S). Für den schwachen Stoß ist die Rekonstruktion des Stoßwinkels γ_S dargestellt. Vergleiche dazu auch Abb. 5.3. Für den starken Stoß kann man analog vorgehen.

Zunächst betrachten wir $\hat{v} = 0$. Dann liefert (5.9) zwei Lösungen: Den senkrechten Verdichtungsstoß mit $(u/c^*)(\hat{u}/c^*) = M^* \hat{M}^* = 1$ (Punkt Q in Abb. 5.4) und den infinitesimalen Stoß mit $\hat{u} = u$ (Punkt P in Abb. 5.4).⁷ Für $M \rightarrow \infty$ geht die Polare in einen Kreis über. Diese Polaren sind qualitativ in Abb. 5.4 gezeigt.

Für gegebenen Ablenkungswinkel ϑ ist $\tan \vartheta = \hat{v}/\hat{u}$. Deshalb müssen die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit nach dem Stoß auf der Geraden $\hat{v} = \hat{u} \tan \vartheta$ liegen (rote Kurve in Abb. 5.5). Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Polaren für gegebene Anström-Machzahl ergeben die beiden Lösungen, die einem schwachen (W) und einem starken Stoß (S) entsprechen (Abb. 5.5). Die Winkel γ_W bzw. γ_S ,

⁷Die Fortsetzung der Polaren hinter den Kuppen, also für $\hat{u} > u$ beschreiben das inverse Problem, wobei (\hat{u}, \hat{v}) die Strömung vor dem Stoß und (u, v) die Strömung hinter dem Stoß sind. Diese Fall blenden wir hier aus.

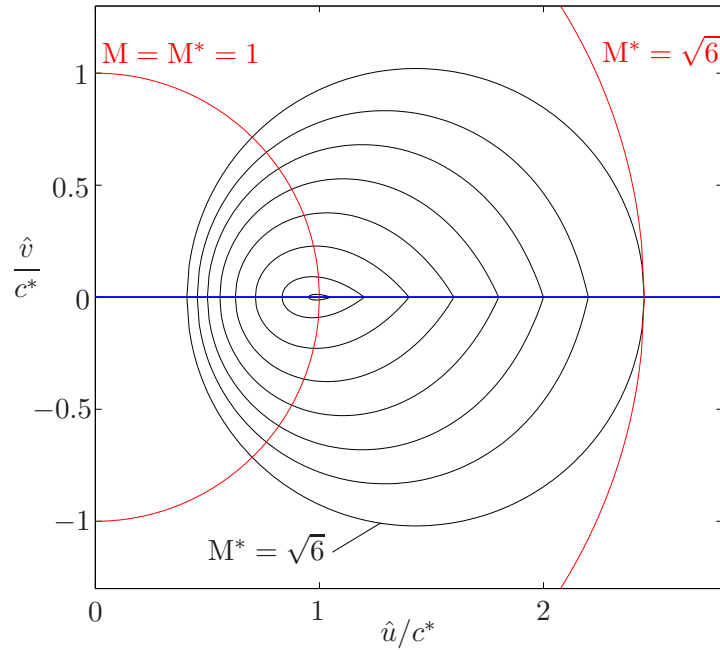


Abbildung 5.6.: Berechnete Polaren nach (5.9) (schwarz) für $\varkappa = 1.4$. In rot sind der Schallkreis $M = M^* = 1$ und die maximale Machzahl nach dem Stoß $M_{\max}^* = \sqrt{6}$ eingezeichnet. Diese maximale Machzahl $M^* = \sqrt{6}$ wird für Anström-Machzahl $M = u/c \rightarrow \infty$ erreicht. Die gezeigten Polaren entsprechen $u/c^* = M^* = 1.05, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4495$.

unter dem der schwache bzw. starke Stoß zur x -Achse auftritt, sind gegeben durch die Geraden durch den Ursprung, welche senkrecht auf der Verbindungslinie \overline{PW} bzw. \overline{PS} steht (blau für den schwachen Stoß (W) in Abb. 5.5)). Die Konstruktion ist klar, wenn man sich überlegt, daß die Kusppe bei $(\hat{u}, \hat{v}) = (u, 0)$ liegt und die Komponenten \hat{u} und \hat{v} durch den Punkt W (S) fixiert sind (Analogie zu Abb. 5.2).

Für einen verschwindenden Umlenkwinkel ϑ geht der Stoß in eine Machlinie über und erscheint dann unter dem Machwinkel $\gamma_W \rightarrow \sin^{-1}(M^{-1})$. Daher ist die Tangente an die Polare im Punkt P gegenüber der \hat{u} -Achse geneigt, entsprechend dem Komplement des Machwinkels. Für den starken Stoß geht $\gamma_S \rightarrow \pi/2$ für $\vartheta \rightarrow 0$.

Eine quantitative graphische Darstellung der Stoßpolaren (5.9) ist in Abb. 5.6 gezeigt (siehe auch Anhang A). Für eine Anström-Machzahl von 1 gilt die Beziehung $u^2 + v^2 = c^2$, welche auch in der Form

$$\left(\frac{u}{c^*}\right)^2 + \left(\frac{v}{c^*}\right)^2 = M^2 = M^{*2} = 1 \quad (5.10)$$

geschrieben werden kann und als *Schallkreis* in der Geschwindigkeitsebene (*Hodographenebene*) eingezeichnet ist. Für Punkte innerhalb des Schallkreises hat man hinter dem Stoß eine Unterschallgeschwindigkeit, für Punkte außerhalb des Schallkreises hat man hinter dem Stoß eine Überschallgeschwindigkeit. Für $u \rightarrow c^*$ zieht sich die Polare auf den Punkt $(\hat{u}/c^*, \hat{v}/c^*) = (1, 0)$ zusammen. Der Maximalwert

Abbildung 5.7.: Wenn der Punkt W auf dem Schallkreis (rot) liegt, hat man hinter dem schwachen Stoß gerade $\hat{M} = 1$ (grün: Polare). Für $\vartheta = \vartheta_{\max}$ (blau) fallen schwacher und starker Stoß zusammen und für $\vartheta > \vartheta_{\max}$ existiert keine Lösung mit ebener Stoßfront mehr.

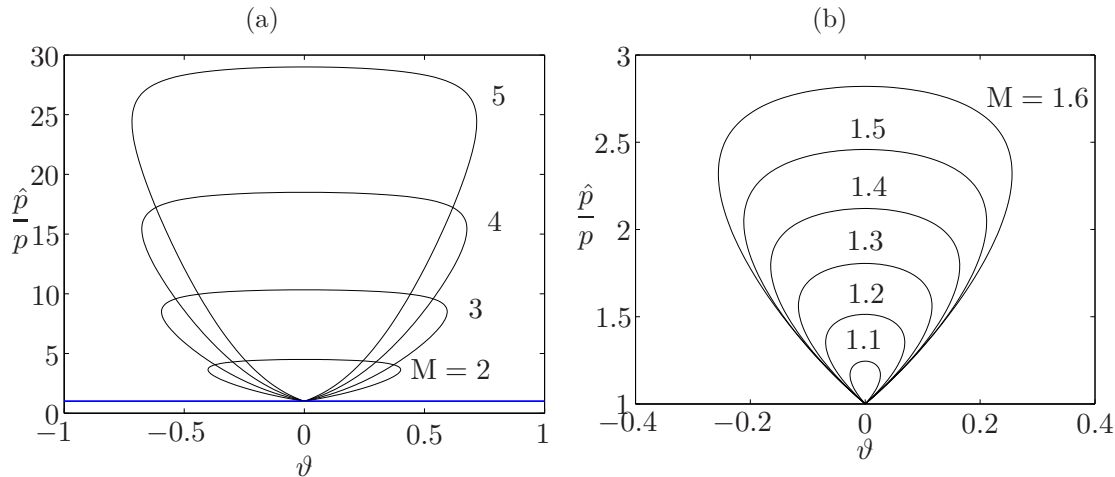
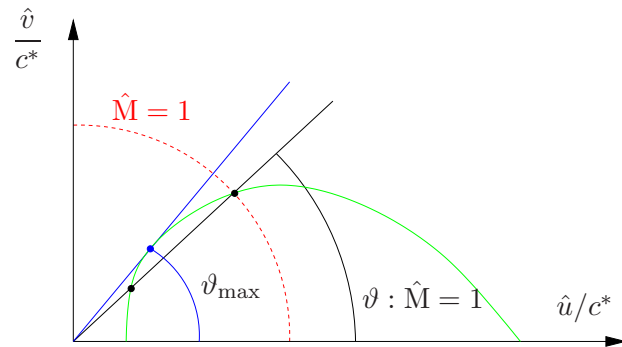


Abbildung 5.8.: Druckverhältnis-Umlenkwinkel-Polaren (Herzkurven). Gezeigt ist das Druckverhältnis \hat{p}/p als Funktion des Umlenkwinkels ϑ für große Anström-Machzahlen $M = 2, 3, 4$ und 5 (a) und kleine Anström-Machzahlen $M = 1.1 \dots 1.6$ (b).

der normierten Geschwindigkeit ist gegeben durch (siehe Grundlagenvorlesung)

$$M_{\max}^* = \frac{v_{\max}}{c^*} = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}} \stackrel{\varkappa=1.4}{=} \sqrt{6} = 2.4495. \quad (5.11)$$

Wenn der Umlenkwinkel größer wird, wandern die Punkte S und W aufeinander zu bis der starke und der schwache Stoß zusammenfallen ($\vartheta = \vartheta_{\max}$). Für $\vartheta > \vartheta_{\max}$ existiert keine Lösung der beschriebenen Form mehr (Abb. 5.7). In Realität löst dann der Stoß von der Spitze des Körpers ab und bildet sich in gebogener Form vor dem Körper aus.

Den Zusammenhang zwischen γ , ϑ und M stellt die Gleichung

$$\cot \vartheta = \tan \gamma \left[\frac{(\varkappa + 1)}{2} \frac{M^2}{(M^2 \sin^2 \gamma - 1)} - 1 \right] \quad (5.12)$$

her, die hier ohne Beweis angegeben wird.

Eine andere mögliche Darstellungsform der Stoßpolaren ist das sogenannte *Herzkurvendiagramm*, das in Abb. 5.8 gezeigt ist (siehe auch Abb. A.1 in Anhang A).

5. Nichtlineare Effekte bei Überschallströmung

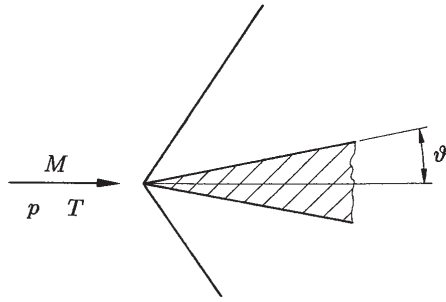


Abbildung 5.9.: Überschallströmung um einen Keil.

In dem Diagramm sind die Polaren in der Ebene gezeichnet, die durch das Druckverhältnis \hat{p}/p und den Umlenkwinkel ϑ aufgespannt wird. Dazu beachten wir die Rankine-Hugoniot-Beziehung (5.2b) und den Zusammenhang zwischen dem Stoßwinkel γ und dem Umlenkwinkel ϑ (siehe Strömungsmechanik 1)

$$\tan \vartheta = 2 \cot \gamma \frac{M^2 \sin^2 \gamma - 1}{2 + M^2 (\kappa + \cos 2\gamma)}. \quad (5.13)$$

Zur Darstellung der Polaren kann der Stoßwinkel γ als Parameter verwendet werden.⁸ Entlang einer Herzkurve variiert der Stoßwinkel im Bereich $\arcsin(1/M) < \gamma < \pi - \arcsin(1/M)$. Für $\gamma = \arcsin(1/M)$ hat man eine Machwelle. Für $\gamma = \pi - \arcsin(1/M)$ hat man eine andere Machwelle. Beide Situationen entsprechen dem Punkt $(\hat{p}/p, \vartheta) = (1, 0)$. Für $\gamma = \pi/2$ hat man einen senkrechten Stoß entsprechend dem Punkt $(\hat{p}/p, \vartheta) = [1 + (2\kappa/(\kappa + 1))(M^2 - 1), 0]$.

Beispiel Als Beispiel betrachten wir die Strömung um einen Keil (Abb. 5.9). Gegeben sei der Anströmzustand mit $M = 3$, $p = 1$ bar, $T = 288$ K, der Umlenkwinkel (Strömungswinkel) sei $\vartheta = 20^\circ$. Gesucht sind der Stoßwinkel γ , Druck \hat{p} , Temperatur \hat{T} und Machzahl \hat{M} sowie der Ruhedruck \hat{p}_0 nach dem schiefen Stoß.

Lösung Den Stoßwinkel erhält man für die schwache Lösung aus dem Stoßpolarendiagramm oder aus (5.12) zu $\gamma = 37.5^\circ$. Mit Gleichung (5.7a) ergibt sich die Anström-Machzahl der Normalkomponente

$$M_n = M \sin \gamma = 1.826, \quad (5.14)$$

und daraus mit der *Isentropentabelle* $M_n^* = 1.55$.⁹ Die Prandtl-Relation für den senkrechten Stoß, $v\hat{v} = c^{*2}$, ergibt nun sofort $\hat{M}_n^* = 1/M_n^* = 0.64$, und mit der Isentropentabelle erhält man

$$\hat{M}_n = 0.61 \quad \text{und} \quad \frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0.80. \quad (5.15)$$

⁸Auch eine explizite Formel ist möglich. Sie ist aber länglich.

⁹Es ist (siehe Grundvorlesung)

$$\frac{c^{*2}}{u^2} = \frac{1}{M^{*2}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{M^2}.$$

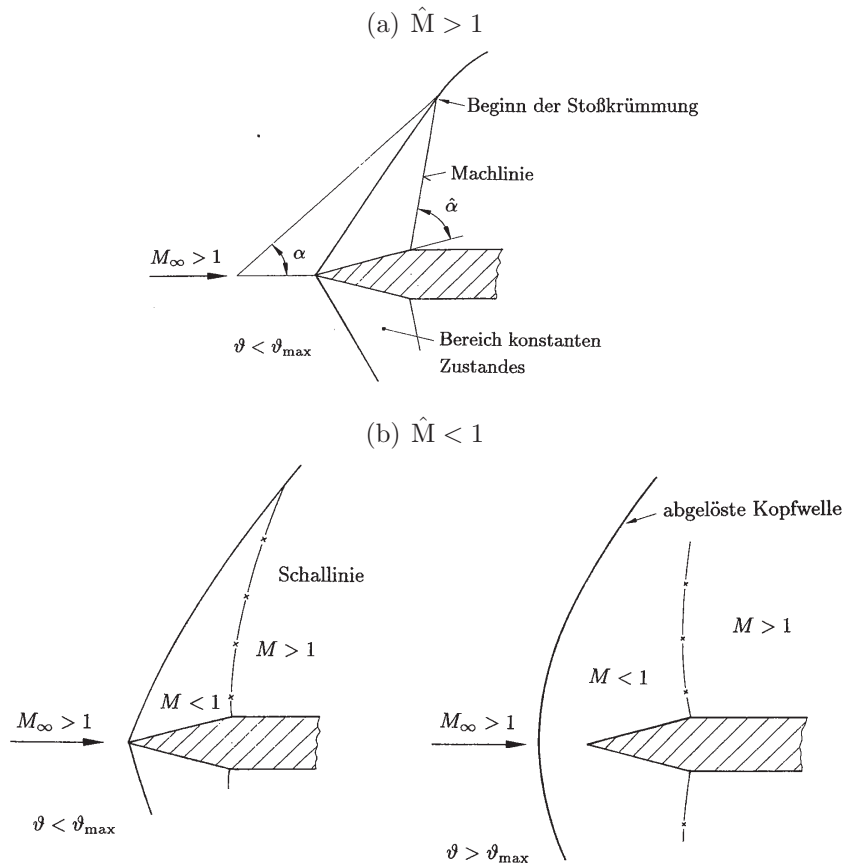


Abbildung 5.10.: Struktur der Stoßfronten bei der Keilumströmung.

Durch Erweiterung wird (Daten aus Isentropentabelle))

$$\frac{\hat{p}}{p} = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \frac{\hat{p}_0}{p_0} \frac{p_0}{p} = 3.7 \quad (5.16)$$

$\underbrace{\quad}_{0.78} \quad \underbrace{\quad}_{0.80} \quad \underbrace{\quad}_{1/0.167}$

und damit $\hat{p} = 3.7 \text{ bar}$. Hier ist zu bemerken, daß z.B. der Wert für das Verhältnis p_0/p fiktiv ist und nichts mit den tatsächlichen Werten in der Strömung zu tun hat, da p_0 als Ruhegröße nicht Galilei-invariant ist. Hingegen sind thermodynamische Größen wie T , p und s oder auch Verhältnisse von Ruhegrößen sehr wohl Galilei-invariant.

In analoger Weise erhält man

$$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{\hat{T}}{\hat{T}_0} \frac{\hat{T}_0}{T_0} \frac{T_0}{T} = 1.55, \quad (5.17)$$

$\underbrace{\quad}_{0.93} \quad \underbrace{\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_{1/0.60}$

beziehungsweise $\hat{T} = 447 \text{ K}$. Die Auswertung des Geschwindigkeitsdreiecks ergibt

$$\hat{M}_n = \hat{M} \sin(\gamma - \vartheta) \quad (5.18)$$

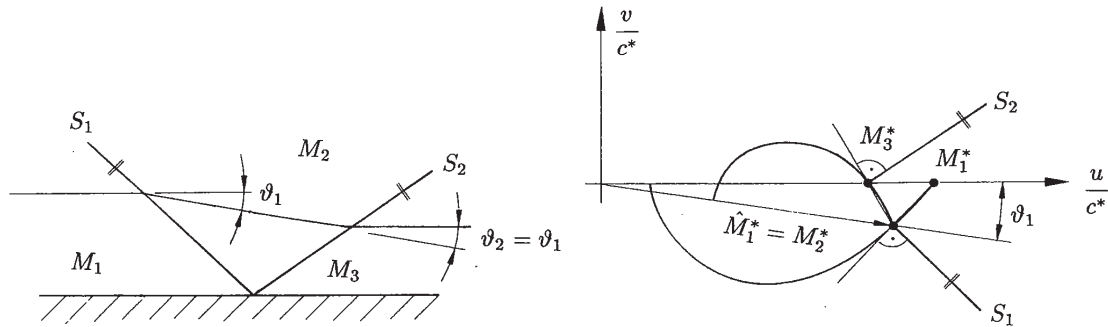


Abbildung 5.11.: Reflexion eines schiefen Verdichtungsstoßes an einer ebenen Wand.

und daher

$$\hat{M} = \frac{\hat{M}_n}{\sin(\gamma - \vartheta)} = 2.03. \quad (5.19)$$

Die Machzahl nach dem Stoß ist in diesem Fall größer als 1! (im Gegensatz zu den Verhältnissen beim senkrechten Verdichtungsstoß, wo immer $\hat{M} < 1$ gilt). Zur Berechnung der tatsächlichen Werte der Ruhegrößen benutzen wir wieder die Isentropentabelle und erhalten

$$M = 3 : \rightarrow \frac{p}{p_0} = 0.027 \rightarrow p_0 = 36.7 \text{ bar} \quad (5.20)$$

und daher $\hat{p}_0 = 0.8p_0 = 29.6 \text{ bar}$.

$$M = 3 : \rightarrow \frac{T}{T_0} = 0.357 \rightarrow T_0 = \hat{T}_0 = 806.7 \text{ K}, \quad (5.21)$$

das ist die Temperatur, der Staupunkte ausgesetzt sind. Die qualitative Lage des Stoßes ist in Abb. 5.10 skizziert.

Mit den bisher erarbeiteten Ergebnissen läßt sich die Reflexion eines schiefen Verdichtungsstoßes an einer festen, ebenen Wand leicht ermitteln. Die graphische Lösung ist in Abb. 5.11 dargestellt. Für $\vartheta > \vartheta_{\max}$ erreicht man den Sonderfall der sogenannten *Machreflexion* (Abb. 5.12). Die Berechnung des Strömungsfeldes stellt in diesem Fall eine schwierige Aufgabe dar, die über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgeht.

5.2. Prandtl-Meyer Expansion

Bisher wurde bei der Behandlung von nichtlinearen Effekten bei Überschallströmungen die Umströmung konkaver Ecken betrachtet. Erfährt die Überschallströmung hingegen eine Umlenkung um eine konvexe Ecke, kommt es zur Ausbildung eines sogenannten *Prandtl-Meyer-Fächers* oder einfach *Expansionsfächers*, in dem die Strömung kontinuierlich und ohne Entropiezuwachs, also verlustfrei, expandiert und daher beschleunigt.