$\mathrm{d}\vec{l}' \to \mathrm{d}\vec{l}$ und $\vec{r}-\vec{r}' \to -\vec{r}$)

$$\mathrm{d}\vec{l} = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}\vec{e}_x \qquad \text{und} \qquad \vec{r} = \frac{a}{\sin\varphi}\vec{e}_r. \tag{3.14}$$

Desweiteren gilt mit mit $\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$

$$\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{l} = \frac{a}{\sin\varphi}\frac{r\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}\underbrace{\vec{e}_r\times\vec{e}_x}_{(-\vec{e}_z)\sin\varphi} \overset{r=a/\sin\varphi}{=} -\frac{a^2\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi}\vec{e}_z. \tag{3.15}$$

Aus (3.13) erhält man dann mit $\vec{r}-\vec{r}' \to -\vec{r}$

$$\vec{u} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\vec{e}_z\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\underbrace{\frac{\sin^3\varphi}{a^3}}_{r^{-3}}\frac{a^2}{\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi a}\vec{e}_z\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi a}\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right)\vec{e}_z. \tag{3.16}$$

Für einen unendlich langen Wirbelfaden ist $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$ und man erhält für die induzierten Geschwindigkeit

$$\vec{u} = w\vec{e}_z = -\frac{\Gamma}{2\pi a}\vec{e}_z. \tag{3.17}$$

Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem Geschwindigkeitsfeld eines Potentialwirbels (2.32). Für einen einseitig unendlich langen Wirbelfaden mit $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi/2$ ergibt sich im Ursprung $(x, y) = (0, 0)$

$$w = -\frac{\Gamma}{4\pi a}. \tag{3.18}$$

3.2. Wirbelsystem eines Tragflügels endlicher, großer Streckung

Wenn man die Rotation der Eulergleichung bildet, erhält man mit $\nabla\times\nabla p = 0$ und unter Beachtung der Vektoridentität[3] $\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u}\times\vec{\omega}$

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \nabla\times\left(\frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u}\times\vec{\omega}\right) = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{u}\times\vec{\omega}) \tag{3.19}$$

$$\overset{\text{Entwicklungssatz}}{=} \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \left[\vec{u}(\nabla\cdot\vec{\omega}) - \vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{u}) - \vec{u}\cdot\nabla\vec{\omega} + \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{u}\right]$$

$$= \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{u} = 0. \tag{3.20}$$

[3] Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{\omega} &= \epsilon_{ijk}u_j\omega_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}u_j\partial_l u_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}u_j\partial_l u_m = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)u_j\partial_l u_m \\ &= u_j\partial_i u_j - u_j\partial_j u_i = \frac{1}{2}\partial_i u_j u_j - u_j\partial_j u_i;\ \blacksquare.\end{aligned}$$