Um die folgenden Beispiele rechnen zu können, benötigen Sie ein paar Informationen, die erst nächste Woche in der Vorlesung besprochen werden:

Hydrostatische Druckverteilung in einem Fluid konstanter Dichte: Der Druck p in Richtungen orthogonal zur Schwerebeschleunigung ist konstant. Angenommen das Koordinatensystem ist so gelegt, dass die Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ in negative y-Richtung zeigt, also $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$, dann ist p nur eine Funktion von y, $p = p(y)$. Hat das Fluid eine Dichte ρ, so ist die Druckdifferenz zwischen zwei Höhen y_0 und y durch

$$p(y) - p(y_0) = -\rho\, g\,(y - y_0)$$

gegeben.

Hydrostatische Druckkräfte: Der hydrostatische Druck p übt auf ein infinitesimales Oberflächenelement $d\vec{A} = \vec{n}\,dA$ eines festen Körpers die infinitesimale Kraft

$$d\vec{F} = -p\,\vec{n}\,dA$$

aus, wobei $\vec{n}$ die Flächennormale ist, die von dem Körper in das Fluid zeigt. Die Gesamtkraft $\vec{F}$, die das Fluid auf den festen Körper ausübt, ergibt sich als Resultierende der infinitesimalen Druckkräfte durch Integration über die Oberfläche des Körpers

$$\vec{F} = -\int_A p(\vec{x})\,\vec{n}\,dA$$

Das Drehmoment $\vec{M}$ bezüglich des Koordinatenursprunges ist durch

$$\vec{M} = -\int_A (\vec{x} \times p(\vec{x})\,\vec{n})\,dA$$

gegeben.

Druckpunkt: Der Druckpunkt $\vec{x}_D$ ist jener Punkt eines festen Körpers, bezüglich dessen das Drehmoment verschwindet, also

$$\int_A p(\vec{x})\,\left((\vec{x} - \vec{x}_D) \times \vec{n}\right)\,dA = \vec{0}$$

1 Wiederholung: Oberflächenintegrale

Oberflächenintegrale werden u.a. bei der Berechnung der Kraft, die ein Fluid auf einen festen Körper ausübt, benötigt. Hier ein einfaches Beispiel zur Wiederholung von Oberflächenintegralen:

Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_A \vec{n}\,dA$$

über die Oberfläche A eines Zylinders mit Radius R und Länge L. Dabei ist $\vec{n}$ der Normalvektor auf die Oberfläche, der aus dem Zylinder herauszeigt.

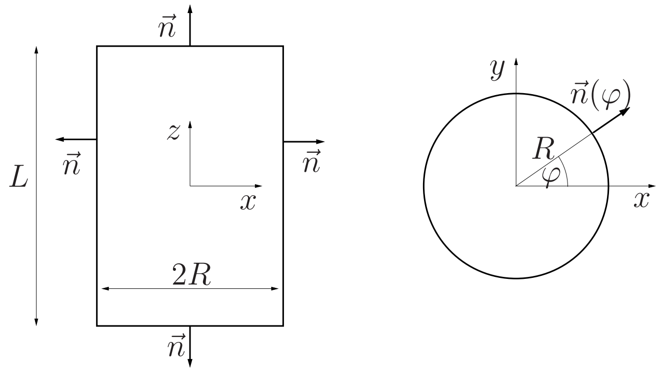
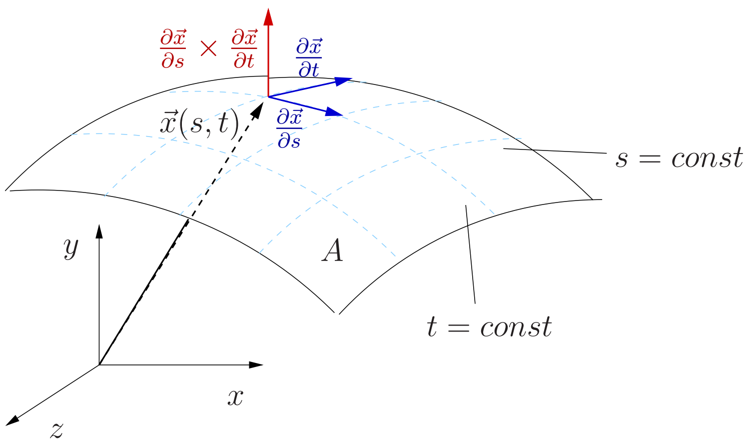


Abbildung 1: Längs- und Querschnitt des Zylinders

Der Vollständigkeit halber sei hier die Berechnung eines Oberflächenintegrals im Allgemeinen wiederholt. Bei den Beispielen, die wir betrachten, wird diese allgemeine Form aber nicht benötigt, da man den Einheitsnormalvektor $\vec{n}$ direkt aus der Zeichnung ablesen kann und das Flächenelement dA meistens bekannt ist (Ebene, Zylinder).



Eine Fläche A wird durch zwei Parameter (s, t) parametrisiert. Der Ortsvektor eines Punktes auf der Fläche kann also geschrieben werden als $\vec{x}(s, t)$. Die Vektoren

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

sind tangential an die Fläche A, siehe Abbildung.

Das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

steht normal auf die Fläche. Die Reihenfolge der Tangentialvektoren in diesem Kreuzprodukt kann frei gewählt werden. Sie bestimmt die sog. Orientierung der Fläche. Bei einer geschlossenen Oberfläche wählt man diese Orientierung, bzw. das Vorzeichen des Normalvektors so, dass der Normalvektor hinaus zeigt.

Das Oberflächenintegral $\int_A \vec{n}\, dA$ wird dann folgendermaßen berechnet

$$\int_A \vec{n} dA = \int_{s_0}^{s_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} ds\, dt = \int_{s_0}^{s_1} \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}{|\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}|}}_{\vec{n}} \underbrace{|\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}|\, ds\, dt}_{dA}$$

Bei den Integrationsgrenzen ist zu beachten, dass $s_0 < s_1$ und $t_0 < t_1$.

Das bisher Gezeigte gilt ganz allgemein. Im Falle des Zylinders kann man natürlich sowohl den normierten Normalvektor $\vec{n}$ als auch dA sehr schnell finden.

2 Hydrostatik – Kraft auf eine vertikale Trennwand

Eine dünne vertikale Wand in einem Behälter der Tiefe L trennt zwei Flüssigkeiten der Dichten ρ_1 und ρ_2. Der Füllstand in dem Behälter beträgt auf beiden Seiten der Wand h.

a) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$, die von den Fluiden auf die Wand ausgeübt wird aus

$$\vec{F} = -\int_A p(\vec{x})\vec{n}\, dA$$

Hinweis: Hierzu müssen Sie über die Wandflächen integrieren, die an die Fluide 1 bzw. 2 angrenzen. Die Wand ist als sehr dünn angenommen, die Dicke der Wand liefert also keinen Beitrag zum Oberflächenintegral. Der Teil der Wand, der in das umgebende Gas reicht, muss auch nicht berücksichtigt werden, da hier auf beiden Seiten derselbe Druck, p_0, herrscht.

Benutzen Sie das angegebene Koordinatensystem mit Ursprung im Punkt O, der sich in z-Richtung im Abstand $L/2$ von den hinteren Wand des Behälters befindet, also genau in der Mitte zwischen vorderer und hinterer Wand!

b) Berechnen Sie den Druckpunkt $\vec{x}_D$.