Übungen Grundlagen der numerischen Methoden der Strömungs- und Wärmetechnik

Blatt 7 – 29. Mai 2008

Am 5.6.08 entfällt die Übung!

Aufgabe 7.1: Zeigen Sie, daß das Verfahren von Adams und Bashforth (1833),

$$a_j^{n+1} = a_j^n - u\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\frac{3}{2}\left(a_{j+1}^n - a_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2}\left(a_{j+1}^{n-1} - a_{j-1}^{n-1}\right)\right], \tag{7.1}$$

eine konsistente Diskretisierung der Advektionsgleichung

$$\partial_t a + u\partial_x a = 0, \qquad u \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

zweiter Ordnung in Raum und Zeit ist.

[Es ist empfehlenswert, für $a_{j\pm1}^{n-1}$ zuerst eine Expansion in x mit dem Referenzwert a_j^{n-1} (anstelle von a_j^n) durchzuführen, um möglichst viele Terme zu eliminieren. Dabei erhalten Sie u.a. die Ableitung $\partial_x a\big|_j^{n-1}$ auf der Zeitebene $n-1$. Diese ist wiederum eine Funktion von t und kann dementsprechend entwickelt werden.]

[8 Punkte]

Aufgabe 7.2: Die *Leapfrog*-Methode für die Advektionsgleichung,

$$\partial_t \phi - u\partial_x \phi = 0 \tag{7.3}$$

mit $u \in \mathbb{R}$ lautet

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n-1} - u\frac{\Delta t}{\Delta x}(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n). \tag{7.4}$$

Untersuchen Sie die Stabilität der Methode (7.4).

[Das Verfahren (7.4) umfaßt drei(!) Zeitebenen in einem Schritt. Stabilität muß *gleichzeitig* von der Zeitebene $n-1$ auf n und n auf $n+1$ gewährleistet sein.

Damit wird aus dem einfachen Verstärkungsfaktor eine 2×2-Matrix G, so daß die Amplituden einer Mode α_{n-1}, α_n und α_{n+1} auf den jeweiligen Zeitebenen durch

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

verknüpft sind. Die erste Zeile des Systems (7.5) ergibt sich aus dem üblichen Ansatz der Stabilitätsprüfung. Für die zweite gibt es nur eine Lösung (die triviale).

Die Stabilitätsbedingung ist dann auf den spektralen Radius (den größten Eigenwert) von G anzuwenden.]

[8 Punkte]

Abgabe 12. Juni 2008