

Übungen Grundlagen der numerischen Methoden der Strömungs- und Wärmetechnik

Blatt 6 – 15. Mai 2008

Aufgabe 6.1: Es soll die (dimensionslose) Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T \quad (6.1)$$

für $x \in [0, 1]$ und $t > 0$ numerisch gelöst werden. Dabei sollen die Anfangsbedingung $T(t=0) = 0$ und die Randbedingungen $T(0, t) = T(1, t) = 1$ gelten.

Erstellen Sie eine Matlab-Funktion, die das FTCS-Schema

$$T_j^{n+1} = sT_{j-1}^n + (1 - 2s)T_j^n + sT_{j+1}^n. \quad (6.2)$$

mit $s = \kappa \Delta t / \Delta x^2$ und der Wärmeleitfähigkeit κ implementiert.

Die Funktion soll die anfänglichen Temperaturwerte T_j^0 , den Parameter s , und die Anzahl der zu integrierenden Schritte als Parameter nehmen.

Als Ergebnis soll die Funktion die Temperaturwerte T_j^n am Ende der Integration liefern.

[Beachten Sie, daß für zwei Randpunkte, $j = 1, J$, die Temperatur durch die Randbedingungen vorgeschrieben und unveränderlich ist.]

[3 Punkte]

Aufgabe 6.2: Benutzen Sie die in Aufgabe 6.1 erstellte Funktion, um Lösungen von Gleichung (6.1) mit $\kappa = 1/12$ für verschiedene Parameter zu berechnen und daraus Grafiken zu erstellen. Benutzen Sie dazu ein Gitter mit 21 Punkten.

Erzeugen Sie ein Plot von $T(x)$ für $s = 5/12$ zu den Zeiten $t = 0.05, 0.2$ und 0.4 .

Erzeugen Sie ein Plot von $T(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0.4$ für $s = 1/24, 1/6$ und $5/12$.

[2 Punkte]

Aufgabe 6.3: Benutzen Sie die in Aufgabe 6.1 erstellte Funktion und erzeugen Sie mit dieser numerische Lösungen für $J = 11, 21, 41, 81, 161$ und 321 Gitterpunkte zum Zeitpunkt $t = 0.2$. Verwenden Sie $\kappa = 1/12$ und $s = 1/24, 1/6$ und $5/12$.

Berechnen Sie zu jeder dieser Lösungen den L_1 -Fehler (s. Aufgabe 3.1) bezüglich der analytischen Lösung

$$T(x, t) = T_0 - T_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin((2m-1)\pi x)}{(2m-1)\pi} \exp(-\kappa(2m-1)^2 \pi^2 t) \quad (6.3)$$

und bestimmen sie daraus die erzielte Ordnung des Verfahrens (6.2).

Erstellen Sie ein doppelt-logarithmisches-Plot des L_1 -Fehlers als Funktion der Gitterpunkte für alle Werte von s .

[3 Punkte]

Bitte die Programme ungezippt vor Beginn der Übung mailen!