Übungen Grundlagen der numerischen Methoden der Strömungs- und Wärmetechnik

Blatt 4 – 24. April 2008

Aufgabe 4.1: Gegeben sind zwei Diskretisierungen

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} f'''_j + O(\Delta x^4) \tag{4.1a}$$

$$f'_j = \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4\Delta x} - \frac{(2\Delta x)^2}{6} f'''_j + O(\Delta x^4), \tag{4.1b}$$

der ersten Ableitung f' einer Funktion $f(x)$ mit den Schrittweiten Δx und $2\Delta x$.

Leiten Sie durch eine geeignete Linearkombination der Approximationen auf dem groben (Gitterweite $2\Delta x$) und feinen Gitter (Gitterweite Δx) eine Diskretisierung von doppelter, d.h. vierter, Ordnung her.

[2 Punkte]

Aufgabe 4.2: Zeigen Sie, daß das Lax-Friedrichs-Verfahren

$$\phi_j^{n+1} = (\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n)/2 - \lambda/2\,(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) \tag{4.2}$$

mit $\lambda = u\Delta t/\Delta x$ eine konsistente Diskretisierung der Advektionsgleichung

$$\partial_t \phi + u \partial_x \phi = 0 \tag{4.3}$$

ist und bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens.

[5 Punkte]

Aufgabe 4.3: Zeigen Sie, daß das Lax-Friedrichs-Verfahren (4.2) auch eine konsistente Diskretisierung der Gleichung

$$\partial_t \phi + u \partial_x \phi = k \partial_x^2 \phi \tag{4.4}$$

ist. Die erreichte Ordnung im Raum ist dabei höher als die in Aufgabe 4.2, wenn k geeignet gewählt wird. Wie lautet dieses k?

[3 Punkte]