# Übungen Grundlagen der numerischen Methoden der Strömungs- und Wärmetechnik

## Blatt 3 – 17. April 2008

**Aufgabe 3.1**: Gegeben seien die Werte $f(x_j)$ und $f'(x_j)$ einer Funktion und deren Ableitung an einer Anzahl von Stellen $x_j$.

Erstellen Sie eine Matlab-Funktion, die diese drei Vektoren als ihre Argumente nimmt, aus den Funktionswerten $f(x_j)$ und den Stütz-Stellen $x_j$ eine Approximation der Ableitung berechnet und den entstandenen Diskretisierungsfehler bezüglich der gegebenen Werte der Ableitung bestimmt.

Als Maß des Fehlers soll die 1-Norm der Differenz zwischen der Approximation $f'_h$ (für die Gitterweite $h$) und des wahren Wertes dienen:

$$e_h := ||f'_h - f'||_{L_1} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} |f'_j - f'(x_j)|. \tag{3.1}$$

Die Approximation und Bestimmung des Diskretisierungsfehlers soll jeweils für Vorwärts- (VD) und zentrale Differenzen (ZD) erfolgen.

> [Für die Berechnung der Norm sind die von Matlab bereitgestellten Funktionen `abs()` und `sum()` besonders von Interesse, um einen einfachen kompakten Ausdruck zu formulieren.]

[4 Punkte]

**Aufgabe 3.2**: Benutzen Sie die in Aufgabe 3.1 erstellte Funktion, um den Diskretisierungsfehler $e_h$ für die Gitterweite $h = 1/N$ für gleichförmige Unterteilungen des Intervalls $[0; 1]$ in $N = 4$, 8, 16, 32, 64 und 128 Teilintervalle zu bestimmen. (Also $x_j = (j-1)/N$ mit $j = 1, 2, \ldots, N+1$.)

Führen Sie dies jeweils für die Funktionen $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin(3\pi x)$ und $f(x) = \exp\big((5x - 5/2)^2\big)$ durch.

[2 Punkte]

**Aufgabe 3.3**: Betrachten Sie die Quotienten $e_{2h}/e_h$ auf der in Aufgabe 3.2 ermittelten Diskretisierungsfehler auf Gittern verschieden feiner Auflösung. (Die Gitterweite wurde jeweils halbiert.)

Wie verhalten sich diese Quotienten für VD und ZD?

Was gibt dann die Größe $\log_2(e_{2h}/e_h)$ an?

Für die polynomialen Funktionen ($x$, $x^2$, $x^3$): Wie steht die Ordnung der Approximation in Verbindung zum Grad des Polynoms?

[4 Punkte]