Übungen Grundlagen der numerischen Methoden der Strömungs- und Wärmetechnik

Blatt 1 – 13. März 2008

Modalitäten der Übung

Der erfolgreiche Anschluß der Übung unterliegt zwei Bedingungen:

Zum einen werden etwa wöchentlich Aufgaben gestellt. Jede Aufgabe hat einen auf dem Aufgabenblatt angegebenen Punktwert. Sie müssen in der Summe über das Semester mindestens die Hälfte der maximal zu erreichenden Punkte erzielen.

Zusätzlich ist eine aktive Beteiligung an der Übung gefordert: Es muß mindestens einmal im Verlauf der Übung eine Lösung zu einer Aufgabe vorgeführt (an der Tafel vorgerechnet und erklärt) werden.

Bilden Sie eine Arbeitsgruppen (insgesamt zwei bis drei Personen).
Geben sie Lösungen immer als Gruppe ab, nicht identische Lösungen mehrfach.

Die Lösungen aller analytischen Aufgaben sollen in Papierform zu den angegebenen Übungs- oder Vorlesungsterminen abgegeben werden.

Lösungen von Programmieraufgaben sind als Programme (keine Grafiken) per Email abzugeben: Ich will diese Programme laufen lassen und die mir Ergebnisse dann ansehen. Benutzen Sie dafür die Adresse `bernhard.weingartner@tuwien.ac.at`.

Aufgabe 1.1: Die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x')^k}{k!} f^{(k)}(x'), \tag{1.1}$$

wobei $f^{(k)}(x')$ die $k$te Ableitung von f an der Referenzstelle x' ist.

a. Benutzen Sie Gleichung (1.1) an den Stellen $x = x_{j\pm1}$ mit der Referenzstelle $x' = x_j$, um eine Approximation der ersten Ableitung f' von f durch eine zentrale symmetrische Differenzenformel herzuleiten. Gehen Sie davon aus, daß das Gitter gleichförmig ist, d.h. $x_j - x_{j-1} = x_{j+1} - x_j = \Delta x$.
Wie lautet der führende Term des Diskretisierungsfehlers? [Der erste weggelassene Term.]

b. Wiederhohlen Sie dies für eine Approximation der zweiten Ableitung f''.

c. Wiederhohlen Sie die Herleitung **a** für ein *nicht*-äquidistantes Gitter mit einem konstanten Streckungsfaktor r, für das also gilt $x_{j+1} - x_j = r(x_j - x_{j-1})$.
Wie lautet in diesem Fall der führende Fehlerterm?

□

Aufgabe 1.2: Gegeben ist das System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\partial_t p + K\partial_x u = 0 \tag{1.2a}$$

$$\partial_t u + \frac{1}{\rho}\partial_x p = 0. \tag{1.2b}$$

Überführen Sie das Gleichungssystem (1.2) in eine einzelne äquivalente Differentialgleichung 2. Ordnung für p.

Welchen Typ (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch) hat diese Gleichung (und damit das System (1.2))?

[4 Punkte]

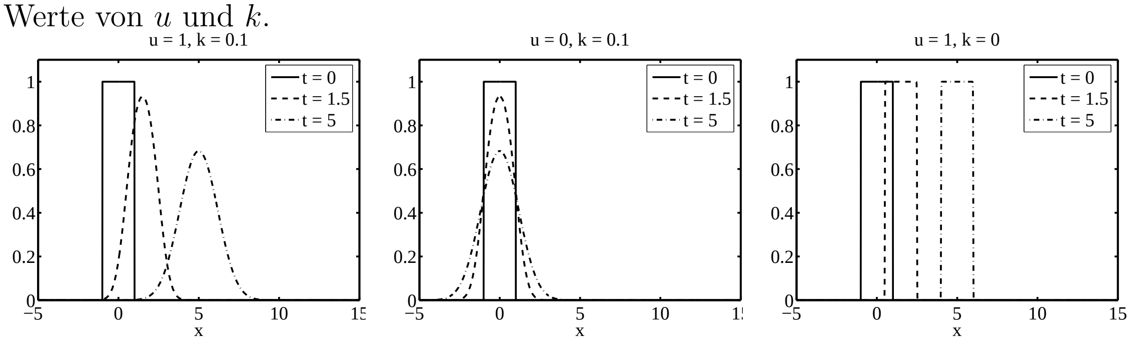
Aufgabe 1.3: Die Advektions-Diffusions-Gleichung für eine Funktion $\phi(x,t)$ lautet

$$\partial_t \phi + u\partial_x \phi = k\partial_x^2 \phi, \tag{1.3}$$

mit der Geschwindigkeit $u \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.

Welchen Typ hat Gleichung (1.3)?

Die nachfolgenden Grafiken zeigen Lösungen dieser Gleichung für unerschiedliche Werte von u und k.



Welcher Term der Gleichung (1.3) hat welchen Effekt auf die Lösung?

Wie verändert sich der Typ, wenn $k = 0$?

[Was passiert im Fall $k = 0$, bzw. was bewirkt der verbleibende Term? Wie sehen also die Abhängigkeitsbereiche der Lösung in der x-t-Ebene aus? Vergleichen Sie dies mit den Abbildungen im Skript.]

Wenn die Lösung ϕ von (1.3) mit der Zeit gegen eine bestimmte Funktion ϕ^* strebt, kann diese dann durch Lösung der Gleichung

$$u\partial_x \phi^* - k\partial_x^2 \phi^* = 0 \tag{1.4}$$

bestimmt werden (stationäres Problem).

Geben Sie eine begründete Vermutung darüber ab, welchen Typ die Gleichung (1.4) hat.

[Das Kochrezept funktioniert hier nicht. Argumentieren Sie qualitativ.]

[8 Punkte]