

# Kapitel 4

## Dünne Reibungsschichten

### 4.1 Laminare, selbstähnliche Grenzschichten (ebenes Problem).

Ausgehend von der reibungsfreien Potentialströmung soll durch Übergang auf reale, reibungsbehaftete Strömungen, welche die Haftbedingung an einer Körperoberfläche erfüllen, die Größenordnung der sich ausbildenden Reibungsgrenzschicht ermittelt werden. Durch Einführung geeigneter dimensionsloser Größen ermittle man aus den Grundgleichungen (inkompressibel) im Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  die Grenzschichtgleichungen mit dementsprechenden Randbedingungen. Unter welchen Bedingungen sind die Grenzschichtprofile selbstähnlich? Für selbstähnliche Grenzschichten bestimme man die Verdrängungsdicke  $\delta^*$  und den lokalen Reibungsbeiwert  $c'_f$  und spezialisiere die Ergebnisse für die einseitige Plattenströmung.

#### 4.1.1 Grundgleichungen

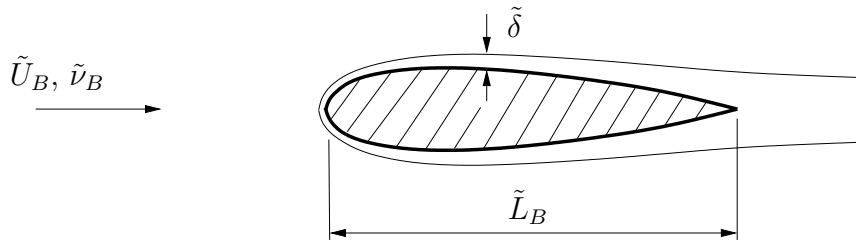
*Voraussetzungen:* konstante Stoffwerte, ebene, inkompressible Strömung.

##### Grundgleichungen

( $\tilde{\phantom{x}}$  bedeutet dimensionsbehaftete Größe)

$$\begin{aligned} \text{MB} \quad \dots \quad & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \text{IB,x} \quad \dots \quad & \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ \text{IB,y} \quad \dots \quad & \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}. \end{aligned}$$

**Abschätzen der Grenzschichtdicke  $\tilde{\delta}$  aus Dimensionsbetrachtungen**



• charakteristische molekulare Impulstransportgeschwindigkeit  $\sim \frac{\tilde{v}_B}{\tilde{\delta}}$

• typische Teilchenverweilzeit  $\sim \frac{\tilde{L}_B}{\tilde{U}_B}$ ,

→ Grenzschichtdicke:  $\tilde{\delta} \sim \frac{\tilde{v}_B}{\tilde{\delta}} \cdot \frac{\tilde{L}_B}{\tilde{U}_B}$  bzw.  $\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{L}_B} \sim \sqrt{\frac{\tilde{v}_B}{\tilde{U}_B \tilde{L}_B}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$

→ Quergeschwindigkeit aus MB:  $\tilde{v} \sim \tilde{\delta} \frac{\tilde{U}_B}{\tilde{L}_B}$  bzw.  $\frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_B} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$  **Grenzschichtkoordinaten**

Nach dem Einführung der dimensionslosen Größen „Grenzschichtkoordinaten“

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_B}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}_B} \sqrt{\text{Re}}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_B}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_B} \sqrt{\text{Re}},$$

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}_B} = 1, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_B} = 1, \quad p = \frac{\tilde{p} - \tilde{p}_B}{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2},$$

wobei mit  $\tilde{L}_B$  eine charakteristische Bezugsgröße,  $\text{Re} = \tilde{U}_B \tilde{L}_B / \tilde{\nu}_B$  die Reynoldszahl,  $\tilde{U}_B$  eine geeignete Bezugsgeschwindigkeit,  $\tilde{\rho}$  die Dichte,  $\tilde{\nu} = \tilde{\mu} / \tilde{\rho}$  die kinematische Zähigkeit,  $\tilde{p}$  der Druck und mit dem Index 'B' Bezugsgrößen bezeichnet werden, ergeben sich die Grundgleichungen zu

$$\begin{aligned} \text{MB} \quad \dots \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \text{IB,x} \quad \dots \quad & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right), \\ \text{IB,y} \quad \dots \quad & \frac{1}{\text{Re}} \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{dp}{dy} + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right). \end{aligned}$$

Unter Grenzschichtnäherung erster Ordnung versteht man nun den Übergang  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Die sich daraus ergebenden *Grenzschichtgleichungen* lauten

$$\begin{aligned} \text{MB} \quad \dots \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \text{IB,x} \quad \dots \quad & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \text{IB,y} \quad \dots \quad & 0 = \frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow p = p(x). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind die *Haftbedingung* an der Wand

$$y = 0 : \quad u = v = 0,$$

und die *Anpassungsbedingung* am Grenzschichttrand an die reibungsfreie Außenströmung

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \lim_{Y \rightarrow 0} U(x, Y) = U_w(x) .$$

Dabei wird mit  $U(x, Y)$  die Geschwindigkeitsverteilung der reibungsfreien Außenströmung um den betrachteten Körper, mit  $U_w(x)$  der daraus resultierenden Wandgeschwindigkeit an der Körperoberfläche  $Y = 0$  und mit  $Y$  die ungestreckte Koordinate senkrecht zur Körperoberfläche bezeichnet. Die dimensionslose Form der Bernoulli-Gleichung liefert den Zusammenhang zwischen dem der Grenzschicht aufgeprägten Druckgradienten und der Wandgeschwindigkeit

$$\frac{U_w^2(x)}{2} + p(x) = \text{const} \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -U_w \frac{dU_w}{dx} .$$

### Stromfunktion

Die dimensionsbehaftete Stromfunktion  $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$  hat die bekannte Eigenschaft

$$\tilde{\psi}_{\tilde{x}} = -\tilde{v} , \quad \tilde{\psi}_{\tilde{y}} = \tilde{u} .$$

Schreibt man für die dimensionslose Form

$$\psi = \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\tilde{L}_B \tilde{U}_B} \tilde{\psi} ,$$

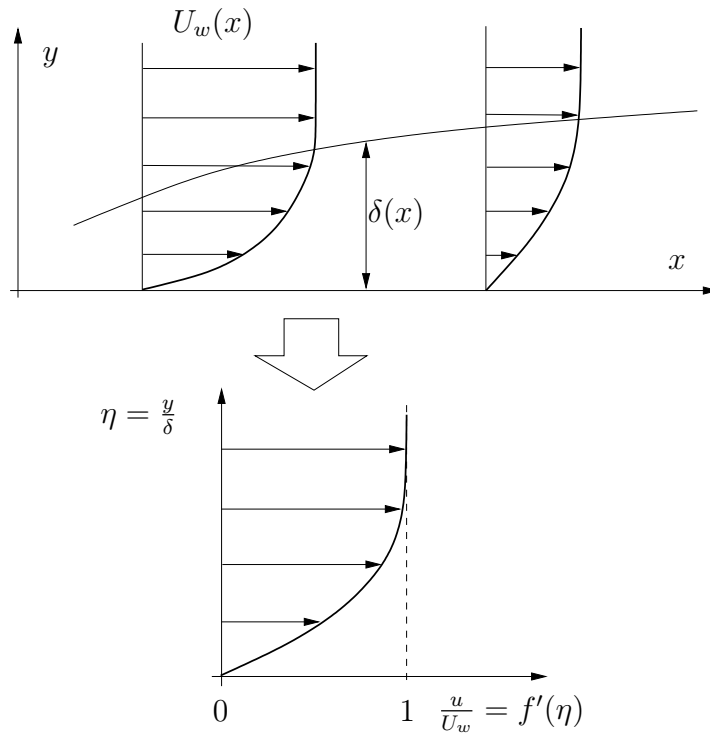
so gilt

$$\psi_x = -v , \quad \psi_y = u .$$

Das Einführen der Stromfunktion in die Grenzschichtgleichungen liefert

$$\begin{array}{ll} \text{MB} & \dots \quad \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0 , \\ \text{IB,x} & \dots \quad \psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} - U_w \frac{dU_w}{dx} - \psi_{yyy} = 0 . \end{array}$$

Im folgenden wird der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht *geometrisch ähnlich* sind.



### Ähnlichkeitslösung

Mit dem Ansatz

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\delta(x)U_w(x)},$$

wobei mit  $\eta(x, y)$  die sog. *Ähnlichkeitsvariable* und  $\delta(x)$  die *Grenzschichtdicke* bezeichnet werden und  $f(\eta)$  die Rolle der Stromfunktion übernimmt, wird

$$u = \psi_y = \delta U_w \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}}_{1/\delta} = U_w f_\eta,$$

$$v = -\psi_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\delta U_w) f + U_w \frac{\partial \delta}{\partial x} \eta f_\eta,$$

$$\psi_{yx} = \dots, \quad \psi_{yy} = \dots, \quad \psi_{yyy} = \dots \quad (\text{selbst rechnen!}).$$

Für die Impulsbilanz in Strömungsrichtung ergibt sich damit

$$\text{IB,x} \quad f_{\eta\eta\eta} + f f_{\eta\eta} \underbrace{\left( U_w \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial U_w}{\partial x} \right)}_A + (1 - f_\eta^2) \underbrace{\delta^2 \frac{\partial U_w}{\partial x}}_B = 0.$$

Selbstähnlichkeit liegt nur dann vor, wenn  $A = \text{const}$  und  $B = \text{const}$  gilt. Die Stromfunktion  $f$  ist dann, wie gewünscht, ausschließlich eine Funktion der Ähnlichkeitsvariablen  $\eta$ , und die Impulsbilanz reduziert sich auf eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. **Keilströmung**

Was bedeuten die Bedingungen  $A = \text{const}$  und  $B = \text{const}$  für die mögliche Form der Wandgeschwindigkeit  $U_w(x)$  und der Grenzschichtdicke  $\delta(x)$ ?

Eine wichtige Lösungsklasse sind die sog. *Keilströmungen*, für sie gilt folgender Ansatz

$$U_w(x) = x^m, \quad \delta(x) = C_n x^n, \quad C_n = \text{const.}$$

Damit gilt

$$B = \text{const} : C_n^2 x^{2n} m x^{m-1} = \text{const} \quad \rightarrow \quad 2n + m - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad n = \frac{1-m}{2},$$

$$A = \text{const} : x^{m+2n-1} C_n^2 (n+m) = \text{const} = 1 \quad \text{gewählt} \quad \rightarrow \quad C_n = \sqrt{\frac{2}{m+1}},$$

d.h. falls die Wandgeschwindigkeit aus der Potentialtheorie durch eine Potenzfunktion  $U_w(x) = x^m$  beschrieben wird, ergibt sich die entsprechende Reibungsgrenzschichtdicke zu

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} x^{\frac{1-m}{2}}.$$

Die Impulsgleichung reduziert sich auf die *Falkner-Skan-Gleichung*

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad \beta = \frac{2m}{1+m},$$

mit den Randbedingungen

$$\eta = 0 : f(0) = f'(0) = 0 \quad (\text{Haftbedingung}),$$

$$\eta \rightarrow \infty : f'(\infty) = 1 \quad (\text{Anpassungsbedingung}).$$

Für praktische Rechnungen sind die *Verdrängungsdicke*  $\delta^*$  und der *lokale Reibungsbeiwert*  $c'_f$  von Bedeutung. Es ist

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_w}\right) dy = \delta(x) \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta = \delta(x) \beta_1,$$

die dimensionsbehaftete Verdrängungsdicke ergibt sich daher zu

$$\tilde{\delta}^*(x) = \frac{\delta^*(x) \tilde{L}_B}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\delta}^*(\tilde{x}) = \frac{\delta^*(\frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_B}) \tilde{L}_B}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

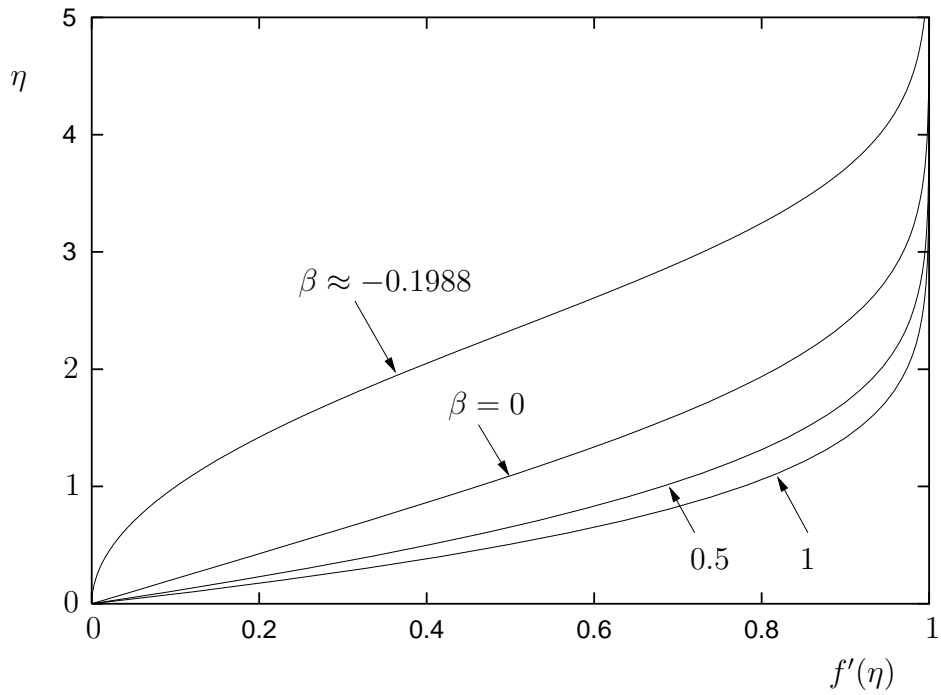
Die *Wandschubspannung*  $\tilde{\tau}_w$  errechnet sich aus

$$\tilde{\tau}_w(\tilde{x}) = \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\tilde{L}_B} \tilde{U}_B,$$

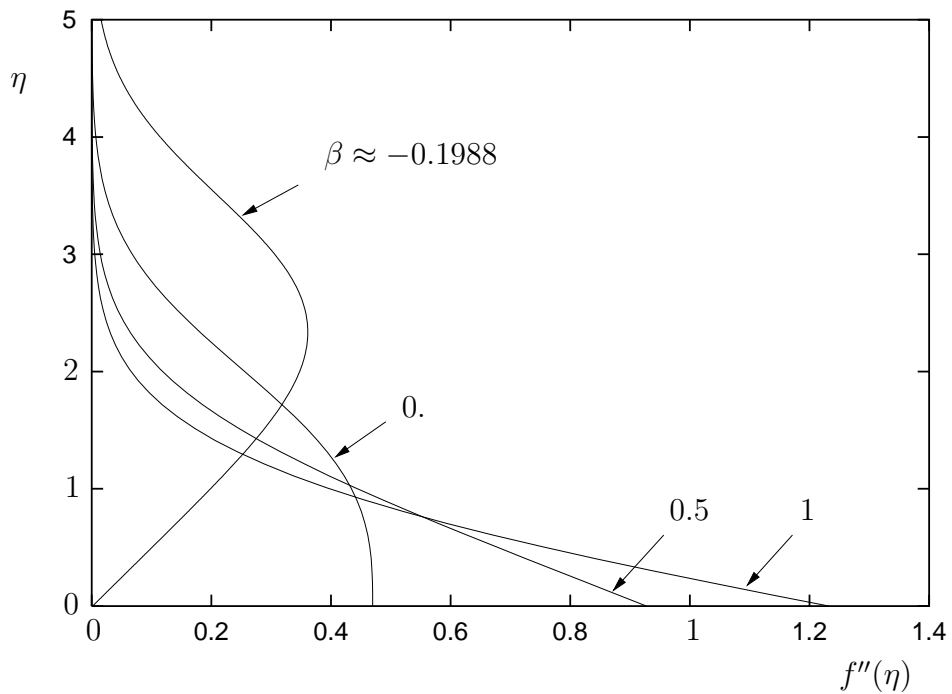
und der lokale Reibungsbeiwert daraus zu

$$c'_f(x) = \frac{\tilde{\tau}_w(x)}{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2 / 2} = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}}_{\psi_{yy} = \frac{U_w}{\delta} f''(\eta)} = \frac{2U_w(x) f''(0)}{\delta(x) \sqrt{\text{Re}}}.$$

Die Verdrängungsdicke wird z.B. für die Korrektur der reibungsfreien Außenströmung benötigt (hierarchisches Konzept der Grenzschichtrechnung, Grenzschichttheorie höherer Ordnung) und der Reibungsbeiwert zur Berechnung des Reibungswiderstandes, den der betrachtete Körper in der Strömung erfährt.



Geschwindigkeitsprofile einiger Falkner-Skan-ähnlichkeitslösungen.



Schubspannungsverteilung einiger Falkner-Skan-ähnlichkeitslösungen.

Strömungstyp	$\beta$	$m$	$f''(0)$	$\beta_1$
Ablöseprofil	-0.1988	-0.090	0	2.3586
ebene Platte	0	0	0.4696	1.2168
Keilströmung	0.1	1/19	0.5870	1.0803
”	0.2	1/9	0.6867	0.9842
”	0.3	3/17	0.7748	0.9110
”	0.4	1/4	0.8544	0.8526
”	0.5	1/3	0.9277	0.8045
”	0.6	3/7	0.9958	0.7640
”	0.7	7/13	1.0598	0.7291
”	0.8	2/3	1.1203	0.6987
”	0.9	9/11	1.1777	0.6718
Staupunkt	1	1	1.2326	0.6479

Zusammenstellung einiger Daten für Falkner-Skan Ähnlichkeitsströmungen.

Plattengrenzschicht:

$$\tilde{U}_w = \tilde{U}_B = \text{const.} \quad \rightarrow \quad U_w = 1 \quad \rightarrow \quad m = 0, \beta = 0$$

$$\delta(x) = \sqrt{2x}, \quad \delta^* = \sqrt{2x} \cdot 1.2168 = 1.7207\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad \tilde{\delta}^* = \frac{1.7208}{\sqrt{\text{Re}_{\tilde{x}}}} \tilde{x}, \quad \text{Re}_{\tilde{x}} = \frac{\tilde{U}_B \tilde{x}}{\tilde{\nu}_B}$$

$$c'_f = \frac{2 \cdot 0.4696}{\sqrt{2x} \sqrt{\text{Re}}} = \frac{0.664}{\sqrt{x} \sqrt{\text{Re}}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_{\tilde{x}}}}$$