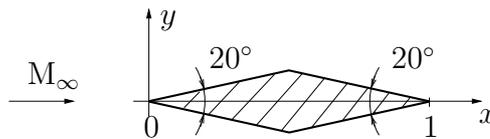


0.1 Rautenprofil in Überschallströmung.

Ermittle den Widerstandsbeiwert eines nichtangestellten, spiegelsymmetrischen Rautenprofils für $M_\infty = 1,6$, $p_\infty = 1 \text{ bar}$, $T_\infty = 288 \text{ K}$, $\kappa = 1,4$ und $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$

1. mit Hilfe der *linearen* Theorie,
2. unter Berücksichtigung *nichtlinearer* Effekte.
3. Man diskutiere das sich ergebende Strömungsbild.



0.1.1 Geschwindigkeits- und Druckstörungen

Ungestörter Anströmzustand:

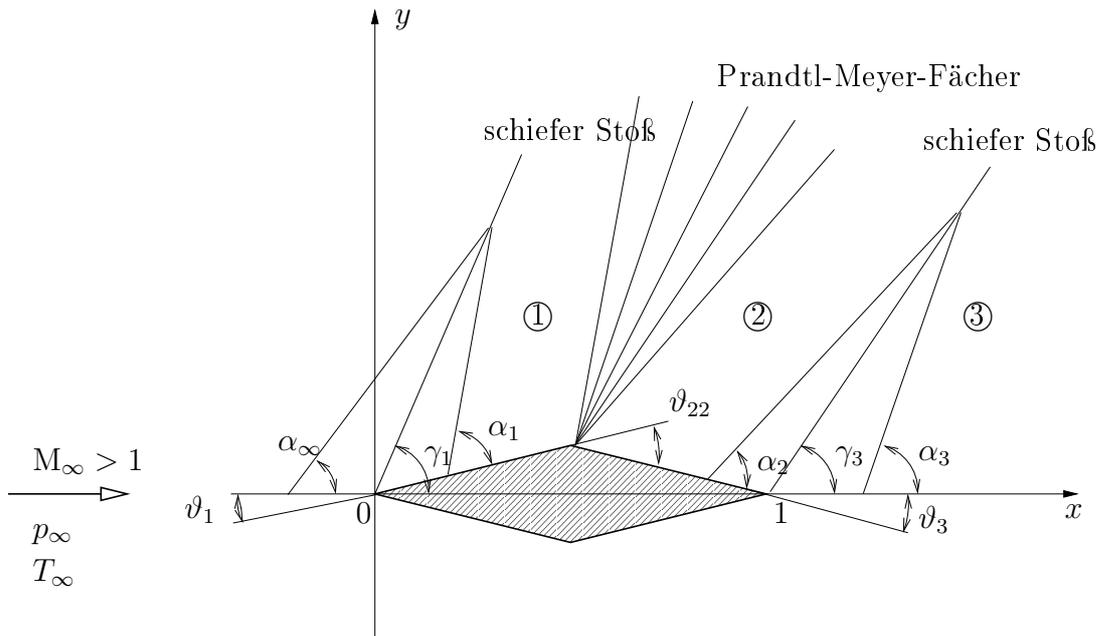
Die Werte für $p_{\infty 0}$ und M_∞^* im ungestörten Anströmzustand entnehmen wir entweder der Tabelle zum Charakteristikendiagramm für $\kappa = 1,4$ und $M_\infty = 1,6$, oder wir berechnen sie wie folgt:

$$M_\infty^* = \sqrt{\frac{M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(M_\infty^2 - 1)}} = 1,425$$

$$\frac{p_\infty}{p_{\infty 0}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M_\infty^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,235 \quad \rightarrow \quad p_{\infty 0} = 4,25 \text{ bar}$$

$$\text{Machwinkel: } \sin \alpha_\infty = \frac{1}{M_\infty} \quad \rightarrow \quad \alpha_\infty = \arcsin \frac{1}{1,6} = 38,7^\circ$$

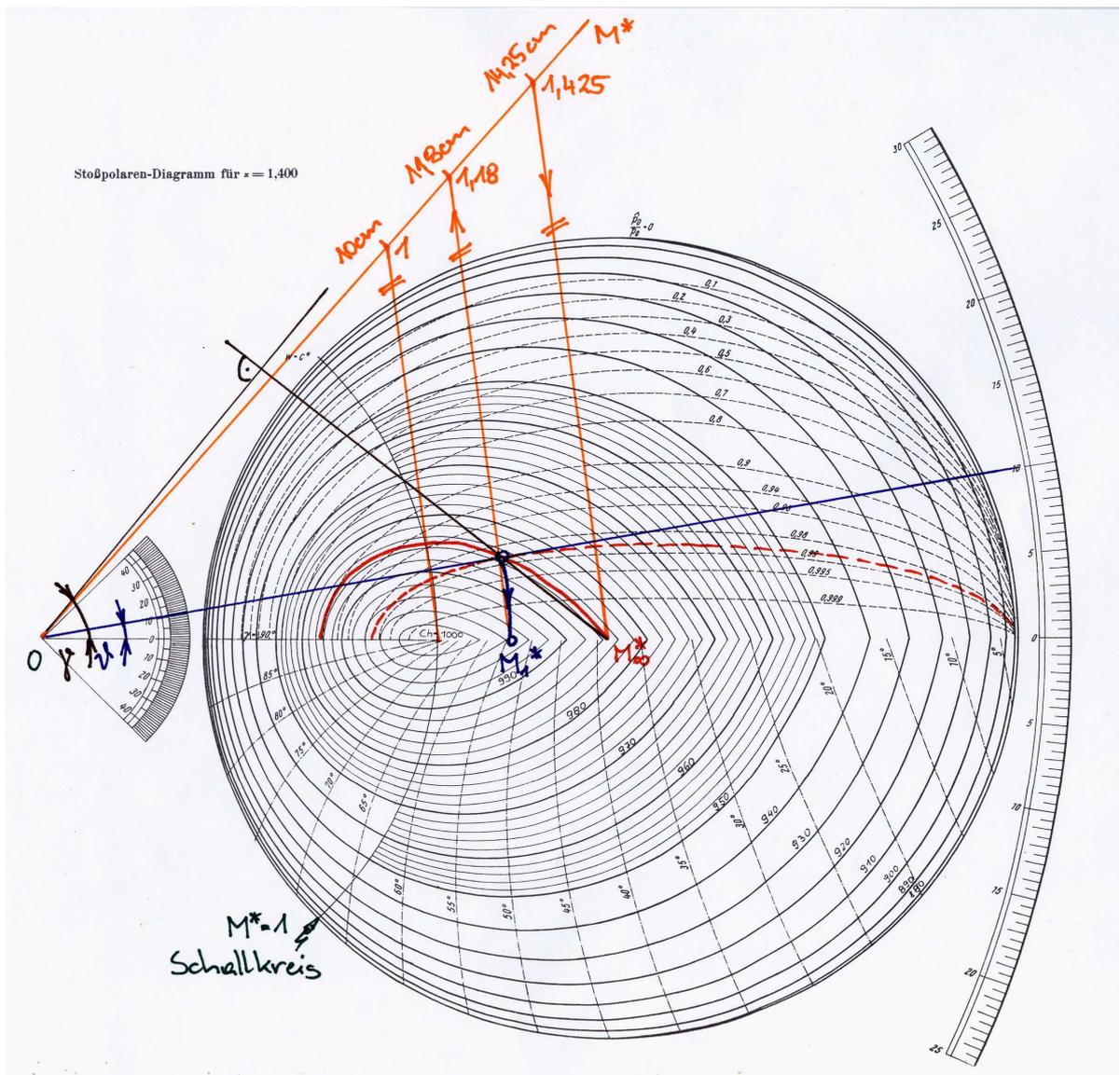
Zustand in Bereich 1



Von der Spitze des Rautenprofils breitet sich ein schiefer Verdichtungsstoß mit dem Stoßwinkel γ_1 aus. Für $\vartheta_1 = 10^\circ$ und $M_\infty = 1,6$ ergibt sich entweder aus Gleichung (5.8) des Vorlesungsskriptums

$$\cot \vartheta_1 = \tan \gamma_1 \left(\frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 - 1} - 1 \right)$$

oder aus dem Stoßpolarendiagramm $\gamma_1 = 51,1^\circ$.



M_1^* erhält man ebenfalls aus dem Stoßpolarendiagramm oder errechnet sich wie folgt:

$$M_{\infty n} = M_{\infty} \sin \gamma_1 = 1,245 \rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad M_{\infty n}^* = 1,191$$

Prandtl-Relation: $M^* \hat{M}^* = M_{\infty n}^* M_{1n}^* = 1 \rightarrow M_{1n}^* = 0,84$

$$\rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad M_{1n} = 0,817$$

$$M_{1n} = M_1 \sin(\gamma_1 - \vartheta_1) \rightarrow M_1 = \frac{M_{1n}}{\sin(\gamma_1 - \vartheta_1)} = 1,240$$

$$\rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad M_1^* = 1,188$$

p_1 errechnet sich:

$$M_{\infty n} \rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad \frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{p_{10}}{p_{\infty 0}} = 0,988$$

$$M_1 \rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad \frac{p_1}{p_{10}} = 0,396$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{p_1}{p_\infty} &= \frac{p_1}{p_{10}} \cdot \frac{p_{10}}{p_{\infty 0}} \cdot \frac{p_{\infty 0}}{p_\infty} = 0,3914 \cdot 0,988 \cdot \frac{1}{0,235} = 1,665 \\ \rightarrow p_1 &= 1,643 \cdot p_\infty = 1,643 \text{ bar} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Das Ruhedruckverhältnis $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$ kann von der strichlierten Linie im Stoßpolarendiagramm abgelesen werden.

$$\text{Machwinkel: } \sin \alpha_1 = \frac{1}{M_1} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{1,242} = 53,8^\circ$$

Zustand in Bereich 2

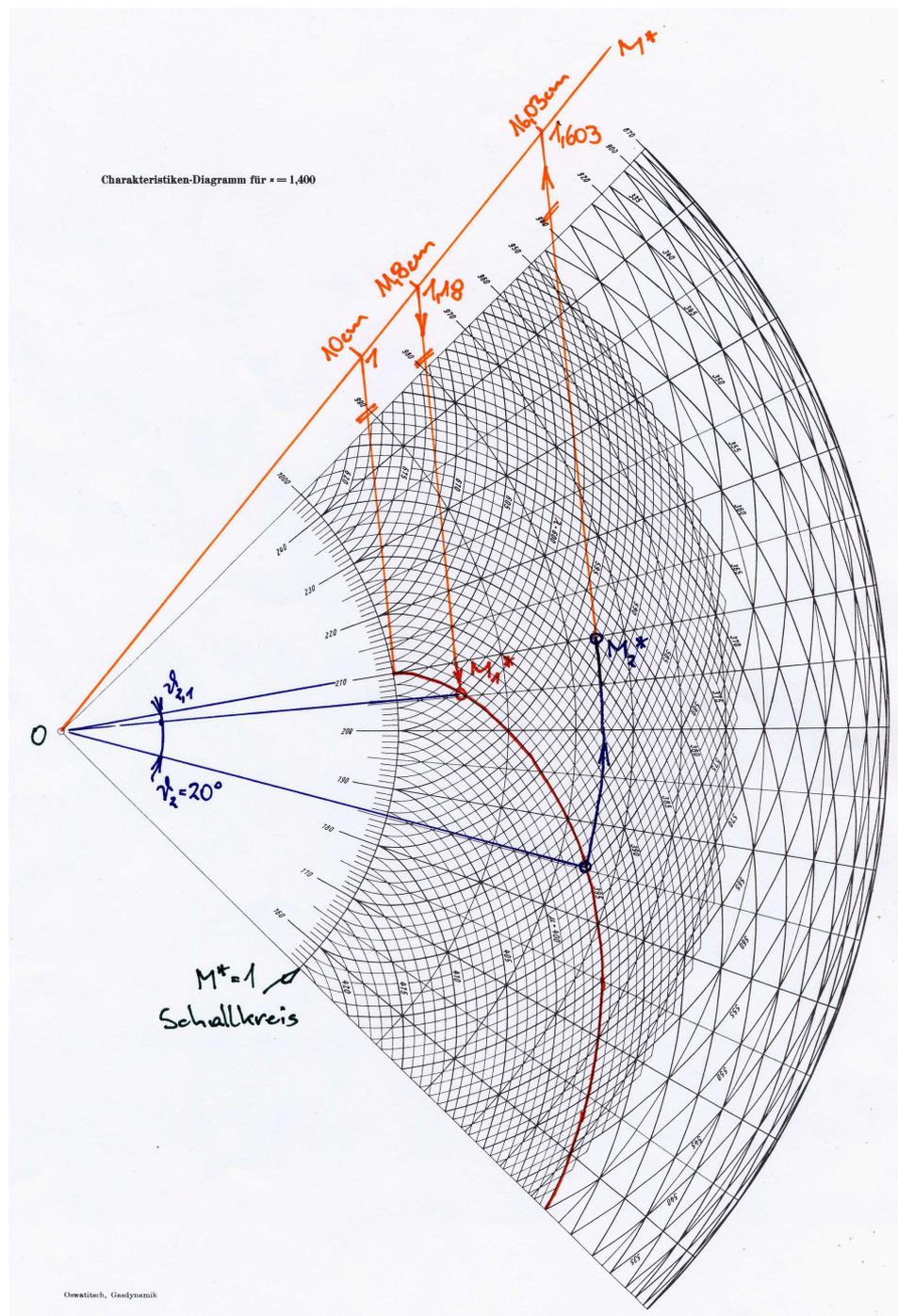
Über die Kante vom Bereich ① nach Bereich ② wird das Medium *isentrop* (verlustfrei) beschleunigt (Prandtl-Meyer-Fächer), d.h. $\frac{p_{20}}{p_{10}} = 1$.

Das Charakteristikendiagramm gilt für $M^* = 1$. Wir müssen also zuerst das Medium durch eine fiktive Umlenkung um ϑ_{21} auf $M_1^* = 1,188$ beschleunigen und können erst dann den Wert von M_2^* bestimmen.

Aus der Isentropentabelle lesen wir folgende Werte ab:

$$\begin{aligned} M_1^* = 1,188 &\Rightarrow \vartheta_{21} = 4,6 \quad \rightarrow \quad \vartheta_{21} + \vartheta_{22} = 24,6^\circ \\ &\rightarrow M_2^* = 1,603 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1,936 \\ &\rightarrow \frac{p_2}{p_{20}} = 0,1412 \\ &\rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_{20}} \cdot \frac{p_{20}}{p_{10}} \cdot \frac{p_{10}}{p_1} = 0,141 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0,396} = 0,3613 \\ &\rightarrow p_2 = 0,356 \cdot p_1 = 0,356 \cdot 1,665 = 0,594 \text{ bar} \end{aligned}$$

$$\text{Machwinkel: } \sin \alpha_2 = \frac{1}{M_2} \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{1}{1,936} = 31,2^\circ$$



Zustand in Bereich 3

Die Berechnung erfolgt analog zum Bereich ① mit dem Umlenkwinkel $\vartheta_3 = 10^\circ$.

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= 40,7^\circ \\ M_3 &= 1,527 \quad \rightarrow \quad M_3^* = 1,413 \\ \frac{p_{03}}{p_{02}} &= 0,986 \quad \frac{p_3}{p_{03}} = 0,2427 \quad \frac{p_3}{p_2} = 1,692 \quad \rightarrow \quad p_3 = 1,004 \text{ bar} \end{aligned}$$

0.1.2 Widerstandsbeiwert c_w

a. Lineare Theorie:

(siehe Beispiel 9.3)

Mit $\tan \vartheta = \frac{\tau/2}{1/2} = \tau \ll 1$ ergibt sich der Widerstandsbeiwert zu

$$\tau = \tan \vartheta_1 = 0,176 \quad \rightarrow \quad c_w = \frac{4\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = 0,0996$$

b. Nichtlineare Theorie:

Impulsbilanz auf der Körperoberfläche

$$0 = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO + \underbrace{\vec{F}_K}_{-\vec{R}} \quad \rightarrow \quad \vec{R} = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO$$

Aus Symmetriegründen ist $R_y = 0$ (d.h. der Auftriebsbeiwert $c_a = 0$)

$$R_x = - \oint_{\partial KV} p n_x dO$$

$$\text{mit } n_x = -\tau h'_{o,u} = \begin{cases} \text{Oberseite} & \dots & \begin{cases} -\tau & 0 \leq x \leq 0,5 \\ \tau & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \text{Unterseite} & \dots & \begin{cases} -\tau & 0 \leq x \leq 0,5 \\ \tau & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$- \oint_{\partial KV} p n_x dO = - \oint_{\partial KV} p n_x b ds \quad \text{mit } \begin{cases} ds \approx dx & \dots \text{ Unterseite} \\ ds \approx -dx & \dots \text{ Oberseite} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow R_x &= - \left\{ \int_0^{1/2} p_1(-\tau)b dx + \int_{1/2}^1 p_2\tau b dx + \int_1^{1/2} p_2\tau b(-dx) + \int_{1/2}^0 p_1(-\tau)b(-dx) \right\} \\ &= (p_1 - p_2)\tau b \end{aligned}$$

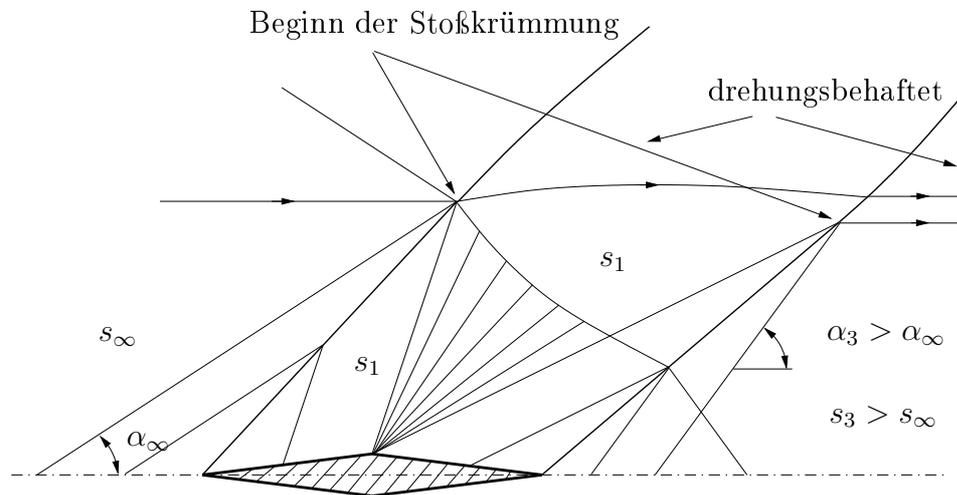
$$\Rightarrow c_w = \frac{F_W}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 A} = \frac{R_x}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 1b} = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2} \tau$$

mit $\tan \frac{\phi}{2} = \tau$:

$$c_w = 0,1032$$

0.1.3 Stromlinienbild

Stromlinienbild eines symmetrisch angestellten Rautenprofils in Überschallströmung:



Stromlinienbild einer angestellten Platte in Überschallströmung:

