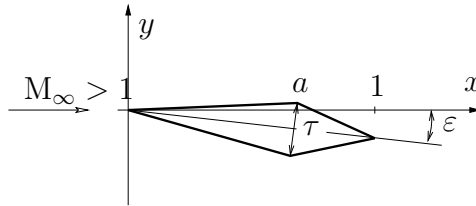


2.3 Angestelltes Rautenprofil in Überschallströmung (lineare Theorie).

Ein dünnes Rautenprofil der Dicke $\tau \ll 1$ wird unter dem Anstellwinkel $\varepsilon \ll 1$ einer Überschallströmung $M_\infty > 1$ ausgesetzt (siehe Skizze).

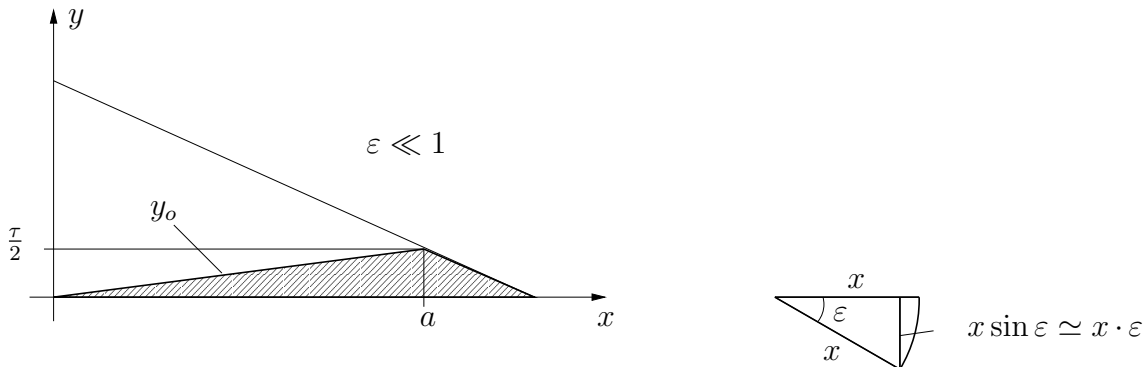
Man berechne mit Hilfe der *linearen Theorie* die Geschwindigkeitsstörungen oberhalb und unterhalb des Profils sowie den Widerstand und den Auftrieb in Form von c_w und c_a .

Bei welchem Wert von a wird der Widerstand bei gegebener Anstellung ε und Dicke τ minimal?



2.3.1 Geschwindigkeitsstörung an der Profloberfläche

Näherung für schwache Anstellung $\varepsilon \ll 1$:



$$y_{o,u} = \begin{cases} \pm \frac{\tau}{2a}x - \varepsilon x & 0 \leq x \leq a \\ \pm \frac{\tau}{2(1-a)}(1-x) - \varepsilon x & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h_o(x) = \frac{y_o}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2a}x - \frac{\varepsilon}{\tau}x & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{2(1-a)}(1-x) - \frac{\varepsilon}{\tau}x & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h_u(x) = -\frac{y_u}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2a}x + \frac{\varepsilon}{\tau}x & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{2(1-a)}(1-x) + \frac{\varepsilon}{\tau}x & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Linearisierte Randbedingungen:

Aus der Potentialfunktion $\Phi(x, y) = u_\infty x + u_\infty \varphi(x, y)$ folgt:

$$u = \Phi_x = u_\infty + u_\infty \varphi_x$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \varphi_x &= \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \\ v &= \Phi_y = u_\infty \varphi_y \\ \rightarrow \quad \varphi_y &= \frac{v}{u_\infty} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für φ lautet ($\alpha_\infty = \arcsin \frac{1}{M_\infty}$)

$$\varphi(x, y) = F(x - y \cot \alpha_\infty) + G(x + y \cot \alpha_\infty) = \begin{cases} F(x - y \cot \alpha_\infty) & \dots \text{ Profiloberseite} \\ G(x + y \cot \alpha_\infty) & \dots \text{ Profilunterseite} \end{cases}$$

mit den Randbedingungen $\varphi_y(x, 0^+) = -\cot \alpha_\infty F'(x) = \tau \frac{\partial h_o}{\partial x}$ bzw. $\varphi_y(x, 0^-) = \cot \alpha_\infty G'(x) = -\tau \frac{\partial h_u}{\partial x}$. D.h.

$$\frac{v}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \pm \tau \frac{\partial h_{o,u}}{\partial x}$$

$$h'_o(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} - \frac{\varepsilon}{\tau} & 0 \leq x \leq a \\ -\frac{1}{2(1-a)} - \frac{\varepsilon}{\tau} & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h'_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} + \frac{\varepsilon}{\tau} & 0 \leq x \leq a \\ -\frac{1}{2(1-a)} + \frac{\varepsilon}{\tau} & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \frac{v}{u_\infty}(x, 0^+) = \begin{cases} \frac{\tau}{2a} - \varepsilon \\ -\frac{\tau}{2(1-a)} - \varepsilon \end{cases}$$

bzw.

$$\rightarrow \quad \frac{v}{u_\infty}(x, 0^-) = \begin{cases} -\frac{\tau}{2a} - \varepsilon \\ \frac{\tau}{2(1-a)} - \varepsilon \end{cases}$$

Die Beziehung von Ackeret liefert uns:

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \mp \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty}$$

2.3.2 Druckbeiwert c_p

$$\begin{aligned} c_p(x, 0^\pm) &= -2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \pm \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty}(x, 0^\pm) \\ &= \pm \frac{2(\pm \tau h'_{o,u})}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{2\tau h'_{o,u}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \end{aligned}$$

2.3.3 Widerstandsbeiwert c_w

Das Kontrollvolumen KV verlaufe entlang der Profilloberfläche.

$$c_w = - \oint_{\partial KV} c_p n_x d\sigma = \frac{2\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 (h_o'^2 + h_u'^2) dx$$

$$\text{mit } n_x(x, 0^+) = -\tau \frac{dh_o}{dx}, \quad n_x(x, 0^-) = -\tau \frac{dh_u}{dx}$$

$$\begin{aligned} c_w &= \frac{2\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2a} - \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{1}{2a} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 \right] x \Big|_0^a \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(-\frac{1}{2(1-a)} - \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2(1-a)} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 \right] x \Big|_a^1 \right\} \\ &= \frac{2\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{1}{2a(1-a)} + \frac{2\varepsilon^2}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

Minimaler Widerstand bei gegebenen ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_w}{\partial a} = 0 &= (1-a) + (-a) \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \\ c_w &= \frac{4\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

2.3.4 Auftriebsbeiwert c_a

$$c_a = - \oint_{\partial KV} c_p n_y d\sigma = \frac{4\tau}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h_u(1)$$

$$\text{mit } n_y(x, 0^+) = +1, \quad n_y(x, 0^-) = -1$$

Mit $h_u(1) = \frac{\varepsilon}{\tau}$ ergibt sich

$$c_a = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Bemerkung:

Der Auftrieb hängt nicht von der Profilform ab!