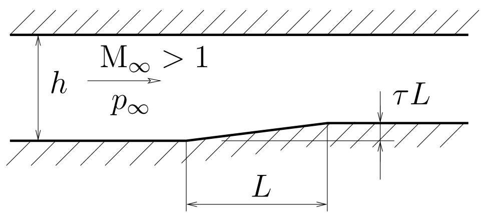
2.2 Kanal-Überschallströmung (lineare Theorie).

Gegeben ist die Situation laut Skizze. Man bestimme die Geschwindigkeits- und Druckstörungen im entstehenden Wellenmuster stromabwärts der Kanalverengung für

1. $1/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} < 2h/L$ und
2. $1/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = 2h/L$ für $\tau \ll 1$.
3. Wie müßte die obere Kanalwand modifiziert werden, damit stromabwärts keine Druckstörungen auftreten?



Lineare Theorie – d'Alembertsche Lösung

Aus der linearisierten Gasdynamischen Gleichung folgt für die Potentialstörung $\varphi(x, y)$ die d'Alembertsche Lösung

$$\varphi(x, y) = F\left(x - y \cot \alpha_\infty\right) + G\left(x + y \cot \alpha_\infty\right) .$$

Diese hat an der undurchlässigen Wand die Randbedingung

$$\left(\frac{v}{u_\infty}\right)_{\mathrm{Wand}} = \left(\varphi_y\right)_{\mathrm{Wand}} = \frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{Wand}}}{\mathrm{d}x}$$

zu erfüllen. Die Geschwindigkeitsstörungen in x- und y-Richtung lauten

$$\begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty} &= \varphi_x = F'\left(x - y \cot \alpha_\infty\right) + G'\left(x + y \cot \alpha_\infty\right) \\ \frac{v}{u_\infty} &= \varphi_y = -\cot \alpha_\infty \left[F'\left(x - y \cot \alpha_\infty\right) - G'\left(x + y \cot \alpha_\infty\right)\right] . \end{aligned}$$

2.2.1 für $\left(\mathrm{M}_\infty^2 - 1\right)^{-1/2} < 2h/L$

Die Störungen breiten sich entlang der Geraden (Machlinien, Charakteristiken)

$$x \pm y \cot \alpha_\infty = const.$$

aus. Daher macht sich eine Störung, die von einer Wand des Kanals an einer Stelle x_0 ausgeht, erst an der Stelle $x_1 = x_0 + h \cot \alpha_\infty > x_0$ an der gegenüberliegenden Wand bemerkbar. Dort wird die Störung reflektiert, und die reflektierte Störung erreicht bei $x_2 = x_1 + h \cot \alpha_\infty$ wieder die erste Wand. Für die Strecke $x_2 - x_0$ gilt somit

$$x_2 - x_0 = 2h \cot \alpha_\infty.$$

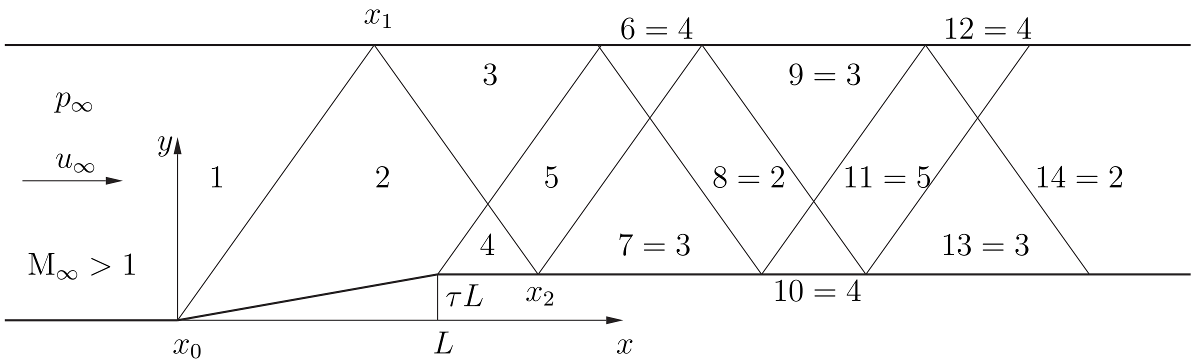
Aus der Angabe folgt

$$\cot \alpha_\infty > \frac{L}{2h}$$

und schließlich

$$x_2 - x_0 > L.$$

Das bedeutet, daß die Störung, die von der Rampe an der unteren Wand verursacht und von der oberen Wand reflektiert wird, erst stromab der Rampe wieder die untere Wand erreicht. Dort erfolgt eine nochmalige Reflexion, und das Schema läßt sich im Rahmen der linearen Theorie beliebig weit fortsetzen, sodaß man das unten gezeigte Wellenbild erhält.



Wellenbild für $\cot \alpha_\infty > L/(2h)$.

Geschwindigkeits- und Druckstörung

Gebiet ①:

Im Gebiet 1 folgt aus der Anfangsbedingung $u = u_\infty$, $v = 0$ und den Randbedingungen an der Wand

$$\varphi_y(x,0) = -\cot \alpha_\infty \left[F'(x) - G'(x)\right] = 0,$$
$$\varphi_y(x,h) = -\cot \alpha_\infty \left[F'\left(x - h\cot \alpha_\infty\right) - G'\left(x + h \cot \alpha_\infty\right)\right] = 0$$

daß $F(x) = G(x) = const.$ O.B.d.A. darf die Konstante gleich null gewählt werden, sodaß überall im Gebiet ①

$$\varphi(x,y) = 0 \quad \to \quad \frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \frac{v}{u_\infty} = 0 \quad c_p = 0$$

gilt.

Bereich ②

Ab $x = x_0$ verursacht die Rampe an der unteren Wand eine Störung. Diese beeinflußt vorerst nur die Funktion $F(x - y \cot \alpha_\infty)$, da sich die Information über die Störung nur entlang der Geraden $x \pm y \cot \alpha_\infty = const.$ und nur stromab ausbreiten kann. Daher gilt im Gebiet ②

$$G(x + y \cot \alpha_\infty) = 0$$

Für $F(x - y\cot\alpha_\infty)$ lautet die Randbedingung (Bemerkung: $F(\xi_{y=0}) = F(x)$)

$$\varphi_y(x, 0^+) = -\cot\alpha_\infty\, F'(x) = \tau$$

Damit ergibt sich

$$F(x) = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\, x$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,(x - y\cot\alpha_\infty) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{u-u_\infty}{u_\infty} = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty} \\ \varphi_y &= \frac{v}{u_\infty} = \tau \\ c_p &= -2\frac{u-u_\infty}{u_\infty} = \frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty} \end{aligned}$$

Bemerkung:
Zwischen den beiden Geschwindigkeitsstörungen besteht die Beziehung von Ackeret: $\varphi_x = -\frac{1}{\cot\alpha_\infty}\varphi_y$.
Die Druckerhöhung im Bereich ② ergibt sich zu $\Delta p = \frac{\varrho}{2}u_\infty^2 c_p$.

Gebiet ③

Im Gebiet ③ treffen linkslaufende Wellen aus Gebiet ② erstmals auf die obere Wand. Daher ergibt die Auswertung der Randbedingung dort

$$\varphi_y(x,h) = -\cot\alpha_\infty\left[-\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty} - G'(x + h\cot\alpha_\infty)\right] = 0$$

$$\rightarrow \quad G(\eta) = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,\eta = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,(x + y\cot\alpha_\infty)$$

Somit gilt für die Potentialstörung

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,(x - y\cot\alpha_\infty) - \frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,(x + y\cot\alpha_\infty) \\ &= -\frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty}\, x \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeitsstörung und den Druckbeiwert lauten

$$\begin{aligned} \frac{u-u_\infty}{u_\infty} &= -\frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty}\,, \\ c_p &= \frac{4\tau}{\cot\alpha_\infty}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung:
$\varphi_y = 0$ bedeutet, daß im Bereich ③ wieder eine horizontale Parallelströmung herrscht.

Gebiet ④

Ähnliche Überlegungen ergeben für das Gebiet ④:

$$\varphi_y(x, 0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad F' = G'$$

zusammen mit

$$G = 0 \quad \rightarrow \quad F = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = 0 \;, \quad c_p = 0 \;.$$

Gebiet ⑤
Im Gebiet ⑤ wiederum gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,(x + y\cot\alpha_\infty) \;, \\ c_p &= \frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty} \;. \end{aligned}$$

Gebiet ⑥
Im Gebiet ⑥ wiederum gilt

$$\varphi_y(x,h) = 0 \quad \rightarrow \quad F' = G'$$

zusammen mit

$$F = 0 \quad \rightarrow \quad G = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = 0 \;, \quad c_p = 0 \;.$$

⇒ Gebiet ⑥=④.
Gebiet ⑦
Im Gebiet ⑦ wiederum gilt

$$\varphi_y(x,0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad F' = G'$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} G' = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty} \quad &\rightarrow \quad F' = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty} \\ &\rightarrow \quad F = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\,(x - \cot\alpha_\infty y) \end{aligned}$$

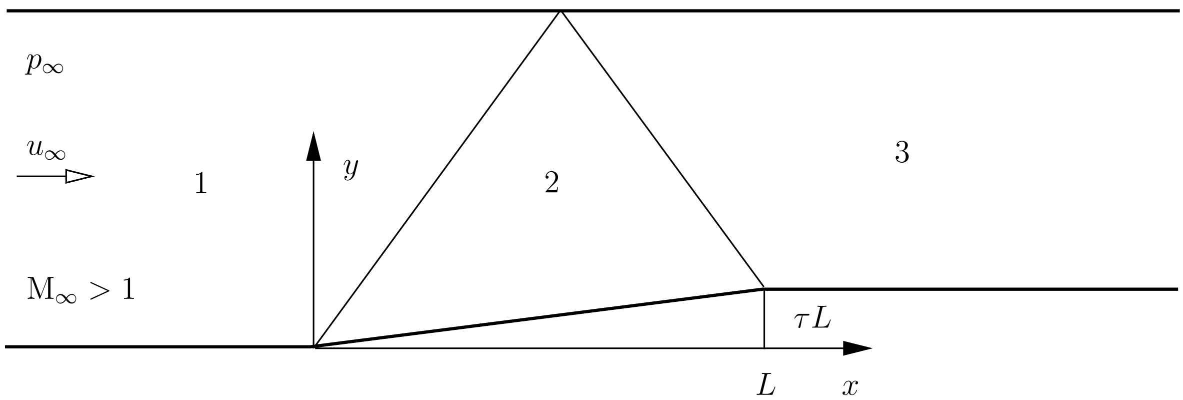
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \varphi(x,y) &= -\frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty}x \\ \frac{u-u_\infty}{u_\infty} &= -\frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty} \\ c_p &= \frac{4\tau}{\cot\alpha_\infty} \end{aligned}$$

⇒ Gebiet ⑦=③.
Gebiet ⑧
Für das Gebiet ⑧ findet man weiters Gebiet ⑧=②.
Gebiet ⑨
Für das Gebiet ⑨ findet man weiters Gebiet ⑨=③.
Gebiet ⑩
Für das Gebiet ⑩ findet man weiters Gebiet ⑩=④.
Gebiet ⑪

Für das Gebiet ⑪ findet man weiters Gebiet ⑪=⑤.
Gebiet ⑫
Für das Gebiet ⑫ findet man weiters Gebiet ⑫=④.
Gebiet ⑬
Für das Gebiet ⑬ findet man weiters Gebiet ⑬=③.
Gebiet ⑭
Für das Gebiet ⑭ findet man weiters Gebiet ⑭=②.

2.2.2 für $\left(\mathrm{M}_\infty^2 - 1\right)^{-1/2} = 2h/L$ und $\tau \ll 1$

Für $\cot\alpha_\infty = L/(2h)$ fällt der Punkt x_2 mit dem Ende der Rampe an der unteren Kanalwand zusammen. Es ergibt sich folglich das unten gezeigte Wellenbild.



Wellenbild für $\cot\alpha_\infty = L/(2h)$.

Für die einzelnen Bereiche erhält man nun die Lösungen (Berechnung wie vorher):
Gebiet ①:

$$\varphi(x,y) = 0\ , \quad c_p = 0\ .$$

Gebiet ②:

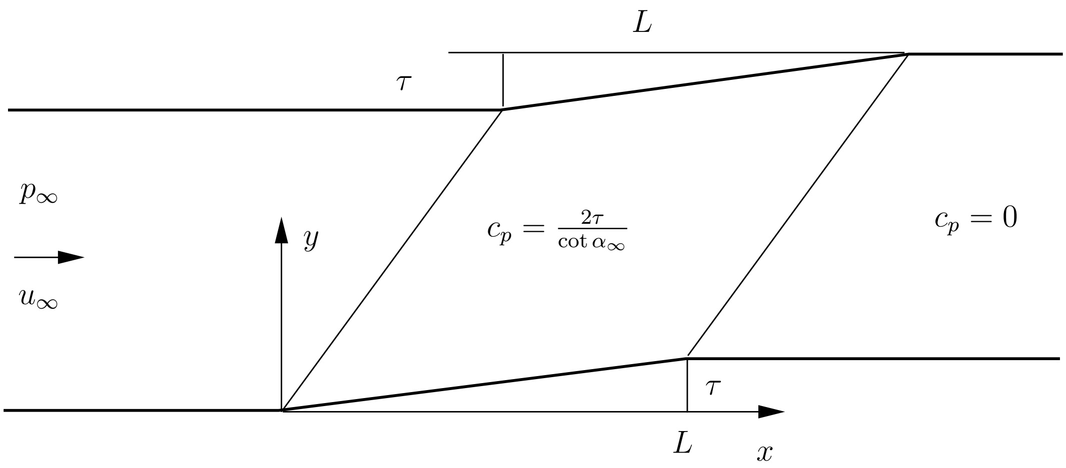
$$\varphi(x,y) = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}(x - y\cot\alpha_\infty)\ ,$$
$$c_p = \frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty}\ .$$

Gebiet ③:

$$\varphi(x,y) = -\frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty}\,x\ ,$$
$$c_p = \frac{4\tau}{\cot\alpha_\infty}\ .$$

2.2.3 Wie müßte die obere Kanalwand modifiziert werden, damit stromabwärts keine Druckstörungen auftreten?

Die Druckstörungen stromabwärts der Rampe werden durch die Reflexion an der oberen Kanalwand verursacht. Die Wand ist daher so zu modifizieren, daß die Randbedingungen durch die eintreffenden linkslaufenden Wellen allein schon erfüllt werden. Dies wird durch die unten gezeigte Anordnung erfüllt.



Modifizierter Kanal mit verschwindenen Druckstörungen stromab der Rampe.

Bereich ①
In Bereich ① gilt

$$F = G = 0,$$

d.h. ungestörte Parallelströmung. **Bereich ②**
Im Bereich ② gilt $F \neq 0\,,\;\; G = 0\,.$

$$\Rightarrow \quad \varphi_(x,y) = F(x - y\cot\alpha_\infty) = -\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty}\cdot(x - y\cot\alpha_\infty)$$

$$c_p = \frac{2\tau}{\cot\alpha_\infty}$$

Obere Wand:

$$\tau \ll 1: \qquad y_{\text{Wand}} = \begin{cases} \tau x & \dots\ y = 0,\ 0 \leq x \leq L \\ h + \tau(x - h\cot\alpha_\infty) & \dots\ y = h,\ h\cot\alpha_\infty \leq x \leq L + h\cot\alpha_\infty \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \varphi_y(x, y = h) = -\cot\alpha_\infty\left(F'(x - h\cot\alpha_\infty) - G'\left(x + h\cot\alpha_\infty\right)\right)$$
$$= \tau$$

$$\rightarrow \quad -\cot\alpha_\infty\left(-\frac{\tau}{\cot\alpha_\infty} - G'(\eta|_{y=h})\right) = \tau$$
$$\tau + \cot\alpha_\infty G'(\eta|_{y=h}) = \tau$$
$$G'(\eta|_{y=h}) = 0 \quad \rightarrow G(\eta) = const.$$

Diese Konstante wird wieder O.B.d.A. gleich 0 gesetzt.