Kapitel 2

Ebene, kompressible Strömung

2.1 Wellige Wand.

Es sind die Geschwindigkeitsstörungen in einer Strömung über einer welligen Wand für $y \geq 0$ zu bestimmen. Die Wand sei durch die Funktion $y_w(x) = \tau \sin(2\pi x)$ gegeben, der „Dickenparameter" τ ist klein gegen 1.

Man löse das gegebene Problem für

1. inkompressible Strömung, d.h. $\mathrm{M}_\infty \ll 1$, durch direkte Lösung der Laplacegleichung und mit Hilfe der Profiltheorie (Singularitätenbelegung),
   Hinweise:
   $$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\sin(ax-\beta\pi/2)}{\gamma^2+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\gamma^{\beta-2}\mathrm{e}^{-a\gamma}\ , \quad a>0,\ \mathrm{Re}(\gamma)>0,\ 0<\mathrm{Re}(\beta)\leq 2,$$
   $$\int_0^\infty \frac{x^{\beta}\cos(ax-\beta\pi/2)}{\gamma^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\gamma^{\beta-1}\mathrm{e}^{-a\gamma}\ , \quad a>0,\ \mathrm{Re}(\gamma)>0,\ |\mathrm{Re}(\beta)|\leq 1\ .$$

2. Unterschallströmung mit Kompressibilitätseinfluß, $\mathrm{M}_\infty < 1$ (Prandtl-Glauert-Transformation),

3. Überschallströmung $\mathrm{M}_\infty > 1$,

und diskutiere die Ergebnisse.

Wand: $y_w(x) = \tau\sin(2\pi x) = \tau h_d(x)$ ... Randbedingung
Potentialfunktion: $\Phi(x,y) = u_\infty x + u_\infty \tau\varphi(x,y)$, φ ... Störpotential
Grundgleichung: $\Delta\Phi = 0 \quad \to \quad \Delta\varphi = 0$

2.1.1 Inkompressibel: $\mathrm{M}_\infty \ll 1$

1. Lösungsmethode: direkte Lösung durch Separationsansatz

Produktansatz $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$ liefert in Laplacegleichung eingesetzt

$$f''g + f\ddot{g} = 0 \quad \to \quad \frac{f''}{f} = -\frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda^2$$

mit der Seperationskonstanten λ^2. Die Wahl des negativen Vorzeichens ergibt für $f(x)$ eine periodische Funktion (Randbedingung!). Somit ist

$$f'' + \lambda^2 f = 0 \qquad , \quad \ddot{g} - \lambda^2 g = 0 \ ,$$
$$f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \qquad g(y) = C\,\mathrm{e}^{\lambda y} + D\,\mathrm{e}^{-\lambda y} \ .$$

Die Integrationskonstante C kann sofort aus der geforderten Bedingung der Beschränktheit der Lösung $\lim_{y\to\infty}\varphi_y = 0$ zu null gesetzt werden: $C = 0$. Es verbleibt

$$\varphi(x,y) = \left(\bar{A}\cos\lambda x + \bar{B}\sin\lambda x\right)\mathrm{e}^{-\lambda y} \ .$$

Um das gegebene Problem einer analytischen Lösung zuzuführen, muß die nichtlineare Randbedingung für die Geschwindigkeit an der Wandoberfläche linearisiert werden:

$$\varphi_y(x,0^+) = h_d'(x) = 2\pi\cos(2\pi x) \ .$$

Man erhält

$$\varphi_y(x,0^+) = -\lambda\left(\bar{A}\cos\lambda x + \bar{B}\sin\lambda x\right) = 2\pi\cos(2\pi x) \ ,$$

womit die Integrationskonstanten und der Separationsparameter mit

$$\lambda = 2\pi \ , \quad \bar{A} = -1 \ , \quad \bar{B} = 0$$

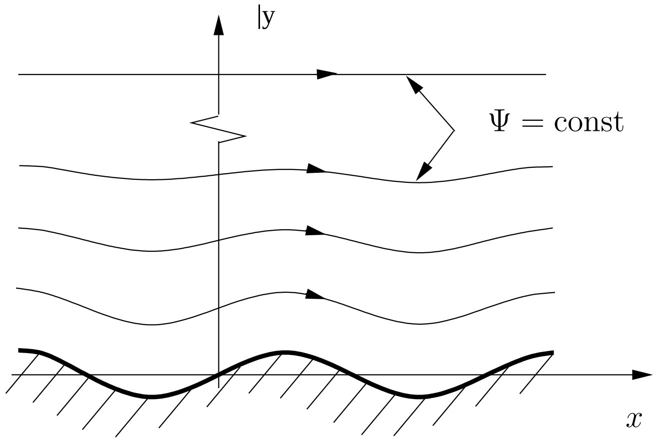
festlegt sind. Für das Störpotential ergibt sich

$$\varphi(x,y) = -\cos(2\pi x)\,\mathrm{e}^{-2\pi y} \ ,$$

und damit für die Geschwindigkeitsstörungen in x- und y-Richtung

$$\frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,y) = \tau\varphi_x(x,y) = 2\pi\tau\sin(2\pi x)\mathrm{e}^{-2\pi y} \ ,$$
$$\frac{v}{u_\infty}(x,y) = \tau\varphi_y(x,y) = 2\pi\tau\cos(2\pi x)\,\mathrm{e}^{-2\pi y} \ .$$

Als wesentliches Ergebnis ist hier zu erwähnen, daß die Geschwindigkeitsstörungen für kleine Anströmmachzahlen (inkompressible Strömung), welche durch die wellige Wand hervorgerufen werden, *exponentiell* für $y \to \infty$ abklingen (siehe Abbildung).



2. Lösungsmethode: Singularitätenbelegung (Profiltheorie)

Dickenverteilung: $h_d(x) = \sin(2\pi x)$
Quellbelegungsfunktion: $m(x) = 2h'_d = 4\pi\cos(2\pi x)$.
Für die Geschwindigkeitsstörung in x-Richtung ergibt sich:

$$\varphi_x(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} m(\xi)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)\cos(2\pi\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi\ .$$

Substitution von $x-\xi = u$ und die Verwendung von $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ergibt weiters

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= 2\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\cos[2\pi(x-u)]u}{u^2+y^2}(-\,\mathrm{d}u)\\
&= 2\cos(2\pi x)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi u)u}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u}_{=0\text{ (ungerade Fkt.)}} + 2\sin(2\pi x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi u)u}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u\\
&= 4\sin(2\pi x)\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2\pi u)u}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u\ .
\end{aligned}$$

Die Verwendung des in der Angabe bereitgestellten Integrals mit den entsprechend identifizierten Parameterwerten $a = 2\pi$, $\beta = 2$ und $\gamma = y$ ergibt schließlich

$$\varphi_x(x,y) = 2\pi\sin(2\pi x)\mathrm{e}^{-2\pi y}\ ,$$

und daher in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis von vorhin

$$\frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,y) = \tau\varphi_x = 2\pi\tau\sin(2\pi x)\,\mathrm{e}^{-2\pi y}\ .$$

Für die Geschwindigkeitsstörung in y-Richtung erhält man in analoger Weise

$$\varphi_y(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} m(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi = \ldots = 4y\cos(2\pi x)\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(2\pi u)}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u\ .$$

Mit dem Integral aus der Angabe, wobei für $\beta = 0$, $a = 2\pi$ und $\gamma = y$ zu setzten ist, ergibt sich

$$\varphi_y(x,y) = 2\pi\cos(2\pi x)\mathrm{e}^{-2\pi y}\ ,$$

und daher

$$\frac{v}{u_\infty}(x,y) = \tau\varphi_y = 2\pi\tau\cos(2\pi x)\,\mathrm{e}^{-2\pi y}\ .$$

2.1.2 Kompressibilitätseinfluß schallnaher Unterschallströmung:

Für Anströmmachzahlen, die noch im Unterschallbereich $\mathrm{M}_\infty \leq \mathrm{M}_{\infty\mathrm{krit}} \lesssim 1$ liegen, aber bereits Kompressibilitätseffekte im Strömungsfeld erwarten lassen, können gesuchte Strömungskenngrößen aus der Lösung des entsprechenden *inkompressiblen* Problems mit Hilfe der *Prandtl-Glauert-Transformation* gewonnen werden. Mit der Definition des Prandtl-Faktors β,

$$\beta = \sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}\,, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

gilt dann beispielsweise für die Geschwindigkeitsstörungen im kompressiblen Fall

$$\begin{aligned} \frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,y) &= \frac{1}{\beta}\frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,\beta y)_\mathrm{i}\,, \\ \frac{v}{u_\infty}(x,y) &= \frac{v}{u_\infty}(x,\beta y)_\mathrm{i}\,, \end{aligned}$$

wobei der Index „i" die Lösung des Problems für den inkompressiblen Fall kennzeichnet.

Die Anwendung der Prandtl-Glauert-Transformation auf das Problem der welligen Wand liefert

$$\begin{aligned} \frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,y) &= \frac{2\pi\tau}{\beta}\sin(2\pi x)\mathrm{e}^{-2\pi\beta y}\,, \\ \frac{v}{u_\infty}(x,y) &= 2\pi\tau\cos(2\pi x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\beta y}\,. \end{aligned}$$

Hervorzuheben ist hier die im Vergleich zur inkompressiblen Rechnung *größere* Geschwindigkeitsstörung in x-Richtung sowie das *langsamere* Abklingen der Störungen für $y \to \infty$.

2.1.3 Überschall: $\mathrm{M}_\infty > 1$

Für Anströmmachzahlen $\mathrm{M}_\infty > 1$ hat die linearisierte gasdynamische Gleichung die Form der Wellengleichung (hyperbolischer Gleichungstypus). Störungen, die von einem bestimmten Raumbereich (Abhängigkeitsbereich) ausgehen, breiten sich *nicht* im gesamten Strömungsfeld aus ($\to$ Einflußgebiet). Die allgemeine, *d'Alembertsche Lösung* dieser Gleichung in charakteristischen Variablen (ξ,η) für das Störpotential lautet

$$\varphi(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1} \quad (= \text{const auf l.l. Machlinien})\,, \\ \eta &= x + y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1} \quad (= \text{const auf r.l. Machlinien})\,, \end{aligned}$$

und den zweimal stetig differenzierbaren, sonst beliebigen, Funktionen F und G.
Im vorliegenden Beispiel breiten sich die Störungen durch die wellige Wand nur entlang linkslaufender Machlinien im Strömungsfeld aus, demnach ist $G(\eta) = 0$. Aus der

Randbedingung (Störung der Strömungsgeschwindigkeit in y-Richtung an der Wand)

$$\frac{v}{u_\infty} = \varphi_y(x, 0^+) = \tau h_o'(x) \ , \quad h_o(x) = \sin(2\pi x)$$

folgt somit

$$\varphi(x, y) = F(x, y) = -\frac{\tau}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}} h_o(x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}) \ .$$

Für die Strömungsgeschwindigkeiten ergibt sich daher im gesamten Raumgebiet $y > 0$

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) = \varphi_x = -\frac{2\pi\tau}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}} \cos\left[2\pi\left(x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right)\right] \ ,$$

$$\frac{v}{u_\infty}(x, y) = \varphi_y = 2\pi\tau \cos\left[2\pi\left(x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right)\right] \ .$$

Wie man sieht, stehen die Geschwindigkeitsstörungen über die *Ackeretsche Formel*

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty}(x, y)$$

miteinander in Beziehung.

Als wesentliches Ergebnis kann hier bemerkt werden, daß im Gegensatz zur (inkompressiblen sowie kompressiblen) Unterschallströmung die durch die Wand hervorgerufenen Störungen *nicht* abklingen, sondern sich längs l.l. Machlinien *ungedämpft* bis ins Unendliche ausbreiten.