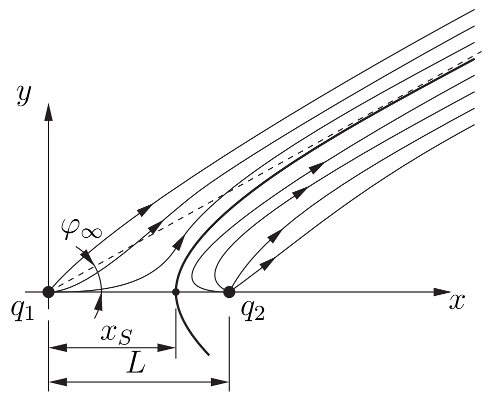
1.4 Doppelquellenanordnung (ebenes Problem).

Man betrachte zwei Quellen im Abstand L mit den Quellstärken q_1 und q_2 $(q_1 > q_2)$.

1. Ermitteln Sie Strom- und Potentialfunktion und daraus die Geschwindigkeitskomponenten für dieses Problem (inkompressibel, reibungsfrei).
2. Wo liegt der Staupunkt, wie lautet die Gleichung für die Trennstromlinie (Polarkoordinaten r, φ)?
3. Man gebe die Parameterdarstellung $r(\varphi)$ der Trennstromlinie an und bestimme den Öffnungswinkel des entstehenden Halbkörpers für $r \to \infty$.



1.4.1 Strom-, Potentialfunktion und Geschwindigkeitskomponenten

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{q_1}{2\pi}\ln z + \frac{q_2}{2\pi}\ln(z-L)\\
&= \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)
\end{aligned}
$$

Nach Transformation auf relative Polarkoordinaten ...

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad F(r,\varphi) &= \frac{q_1}{2\pi}\ln\left(r_1 e^{i(\varphi_1+2\pi n)}\right) + \frac{q_2}{2\pi}\ln\left(r_2 e^{i(\varphi_2+2\pi n)}\right)\\
&= \frac{q_1}{2\pi}\left[\ln r_1 + i\left(\varphi_1 + 2\pi n\right)\right] + \frac{q_2}{2\pi}\left[\ln r_2 + i\left(\varphi_2 + 2\pi n\right)\right]\\
\rightarrow \quad \Phi(r,\varphi) &= \mathrm{Re}(F) = \frac{q_1}{2\pi}\ln r_1 + \frac{q_2}{2\pi}\ln r_2\\
\rightarrow \quad \Psi(r,\varphi) &= \mathrm{Im}(F) = \frac{q_1}{2\pi}\left(\varphi_1 + 2\pi n\right) + \frac{q_2}{2\pi}\left(\varphi_2 + 2\pi n\right)
\end{aligned}
$$

Rücktransformation in karthesische Koordinaten mittels

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{x^2+y^2} & \varphi_1 &= \arctan\frac{y}{x}\\
r_2 &= \sqrt{(x-L)^2+y^2} & \varphi_2 &= \arctan\frac{y}{x-L}
\end{aligned}
$$

Die Geschwindigkeitskomponneten erhalten wir aus

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{q_1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{q_2}{2\pi}\frac{x-L}{(x-L)^2+y^2}$$
$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{q_1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{q_2}{2\pi}\frac{y}{(x-L)^2+y^2}$$

1.4.2 Lage des Staupunkts, Gleichung der Trennstromlinie

Die Lage der Staupunkte erhält man aus den Gleichungen

$$u = v = 0.$$

wir beginnen mit $v = 0$:

$$0 = \frac{q_1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{q_2}{2\pi}\frac{y}{(x-L)^2+y^2}$$
$$0 = y\left(\frac{q_1}{x^2+y^2} + \frac{q_2}{(x-L)^2+y^2}\right)$$

was nur für $y = 0$ erfüllt ist, da der Klammernausdruck stets positiv ist. Mit Hilfe von $u = 0$ erhalten wir die x-Koordinate x_S des Staupunktes:

$$0 = \frac{q_1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{q_2}{2\pi}\frac{x-L}{(x-L)^2+y^2}$$
$$0 = q_1\frac{x}{x^2+y^2} + q_2\frac{x-L}{(x-L)^2+y^2}\Bigg|_{\text{an } y=0}$$
$$0 = q_1\frac{x}{x^2} + q_2\frac{x-L}{(x-L)^2}$$
$$0 = \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x-L}$$
$$\Rightarrow \quad x_S = \frac{Lq_1}{q_1+q_2} \quad \text{bzw. in rel. Polark.} \quad (r_{1S}, r_{2S}, \varphi_{1S}, \varphi_{2S}) = \left(\frac{Lq_1}{q_1+q_2}, \frac{Lq_2}{q_1+q_2}, 0, \pi\right)$$

Die Trennstromlinie geht durch den Staupunkt, die Stromfunktion ist auf ihr konstant und ihr Wert errechnet sich aus (beachte φ_2 und φ_1 sind nicht unabhängig voneinander, sondern hängen über die Koordinatentransformationen zusammen)

$$\Psi_S = \frac{q_1}{2\pi}(\varphi_{1S} + 2\pi n) + \frac{q_2}{2\pi}(\varphi_{2S} + 2\pi n)$$

ausgewertet an der Stelle $(r_{1S}, r_{2S}, \varphi_{1S}, \varphi_{2S})$ folgt direkt

$$\Psi_S = q_1 n + \frac{q_2}{2\pi}(\pi + 2\pi n)$$

und die Gleichung der Trennstromlinie ist dann

$$\frac{q_2}{2} = \frac{q_1}{2\pi}\varphi_1 + \frac{q_2}{2\pi}\varphi_2$$

bzw. in karthesischen Koordinaten

$$q_2\pi = q_1 \arctan\frac{y}{x} + q_2 \arctan\frac{y}{x-L}$$

Bem.: die Nichteindeutigkeit des kompl. Log. fällt wieder heraus!

1.4.3 Parameterdarstellung $r(\varphi)$ der Trennstromlinie und Öffnungswinkel des Halbkörpers für $r \to \infty$

Wir gehen von der Gleichung der Trennstromlinie aus und wechseln wieder auf Polarkoordinaten ...

$$\begin{aligned}
q_2\pi &= q_1 \arctan\frac{y}{x} + q_2 \arctan\frac{y}{x-L} \\
q_2\pi &= q_1\varphi + q_2 \arctan\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi - L} \\
\pi - \frac{q_1}{q_2}\varphi &= \arctan\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi - L} \\
\tan\left(\pi - \frac{q_1}{q_2}\varphi\right) &= \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi - L} \\
r\sin\varphi &= (r\cos\varphi - L)\tan\left(\pi - \frac{q_1}{q_2}\varphi\right) \\
r\left(\cos\varphi\tan\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi - \pi\right) + \sin\varphi\right) &= L\tan\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi - \pi\right) \\
r &= \frac{L\tan\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi - \pi\right)}{\cos\varphi\tan\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi - \pi\right) + \sin\varphi}
\end{aligned}$$

Natürlich gilt ganz allgemein $\tan(a - \pi) = \tan(a)$ und damit

$$r = \frac{L\sin\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi\right)}{\sin\left(\left(\frac{q_1}{q_2} + 1\right)\varphi\right)}$$

Den Öffnungswinkel des Halbkörpers findet man, indem in der Gleichung für die Trennstromlinie der Grenzübergang $r \to \infty$ gebildet wird:

$$q_2\pi = q_1\varphi_\infty + q_2 \arctan\frac{\sin\varphi_\infty}{\cos\varphi_\infty}.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{1 + q_1/q_2}.$$