1.3 Unsymmetrisches, angestelltes Parabelbogenzweieck.

Gegeben sei ein dünnes Profil mit den Koordinatenfunktionen $y_o(x) = 16\tau x\,(1-x)\,/3$ und $y_u(x) = -8\tau x\,(1-x)\,/3$ für die Ober- und Unterseite, der Dickenparameter τ sei $\ll 1$. Das Profil wird mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_\infty$ unter dem Winkel $\varepsilon \ll 1$ angeströmt.

Gesucht sind die Geschwindigkeitsstörungen und der Druckbeiwert c_p an der Profilober- und -unterseite, sowie der Auftriebsbeiwert c_A.

Hinweise:

$$\oint_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2} \qquad \oint_0^1 \xi\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x\,(1-x)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\oint_0^1 \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi - x}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\pi}{2}\,(2x-1)$$

$$\oint_0^1 \frac{\xi\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi - x}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{3\pi}{8}\left[1 - 4\,(1-x) + \frac{8}{3}\,(1-x)^2\right]$$

1.3.1 Geschwindigkeitsstörung an der Profiloberfläche

Geschwindigkeitsstörung in y-Richtung:

Für $0 \leq x \leq 1$ gilt:

$$\frac{v}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \tau\,[\pm h_d' + h_w'] = \begin{cases} \frac{16}{3}\tau(1-2x) & \ldots \quad \text{Oberseite} \\ -\frac{8}{3}\tau(1-2x) & \ldots \quad \text{Unterseite} \end{cases}$$

Geschwindigkeitsstörung in x-Richtung:
Dickeneffekt:

$$\begin{aligned} \varphi_{1d,x}(x, 0^\pm) &= \frac{4}{\pi}\oint_0^1 \frac{1-2\xi}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{4}{\pi}\oint_0^1 \frac{1-2x+2x-2\xi}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{4}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[((2x-1)\ln\mid x-\xi\mid +2\xi)\mid_0^{x-\varepsilon} + ((2x-1)\ln\mid x-\xi\mid +2\xi)\mid_{x+\varepsilon}^1\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[2+(2x-1)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]$$

Anstelleffekt:

$$\varphi_{2,x}(x,0^{\pm}) = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Wölbeffekt:

$$\varphi_{1w,x}(x,0^{\pm}) = \mp\frac{4}{3\pi\sqrt{x(1-x)}}\Bigg[\underbrace{\oint_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}(1-2\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{\substack{\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{3\pi}{8}\\ =-\frac{\pi}{4}}}$$

$$+ \underbrace{\oint_0^1 \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x}(1-2\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{\substack{-\frac{\pi}{2}(2x-1)-2\cdot\left(-\frac{3\pi}{8}\left[1-4(1-x)+\frac{8}{3}(1-x)^2\right]\right)\\ =-\frac{7\pi}{4}+2\pi x+2\pi(1-x)^2}}\Bigg]$$

$$= \mp\frac{4}{3\pi\sqrt{x(1-x)}}\underbrace{\left[-2\pi+2\pi x+2\pi-4\pi x+2\pi x^2\right]}_{\substack{-2\pi x+2\pi x^2\\ =2\pi x(x-1)}}$$

$$= \pm\frac{8}{3}\sqrt{x(1-x)}$$

Die Geschwindigkeitsstörung an der Profiloberseite in x-Richtung ergibt sich nun aus der Summe aller drei Effekte:

$$\frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,0^{\pm}) = \frac{4\tau}{\pi}\left(2+(2x-1)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right) \pm \frac{8\tau}{3}\sqrt{x(1-x)} \pm \varepsilon\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

1.3.2 Druckbeiwert c_p an der Profiloberfläche

Für dünne Profile mit schwacher Anstellung, d.h $\tau \ll 1$ und $\varepsilon \ll 1$ gilt:

$$c_p(x,0^{\pm}) = -2\frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x,0^{\pm})$$

1.3.3 Auftriebsbeiwert c_A

$$c_A = -\int_0^1 (c_{po}-c_{pu})\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1\left(\frac{8\tau}{3}\sqrt{x(1-x)}+\varepsilon\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \cdots = \frac{4\pi\tau}{3}+2\pi\varepsilon$$