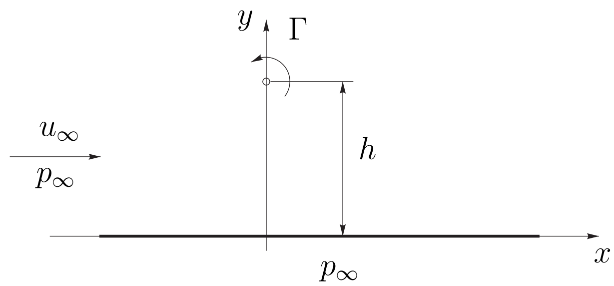
## 1.2 Potentialwirbel über Ebene.

Ein zweidimensionaler Potentialwirbel der Stärke $\Gamma$ befindet sich im Abstand $h$ oberhalb einer Ebene. Im Unendlichen sei der Druck $p_\infty$ und die Geschwindigkeit $u_\infty$ parallel zur Ebene. Die Flüssigkeit sei inkompressibel und reibungsfrei. (Anwendung des Spiegelungsprinzipes)

Gesucht sind:

1. Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential für diese Anordnung,
2. die Geschwindigkeitskomponenten,
3. der Druckbeiwert $c_p(x, 0)$ an der Ebene,
4. die Kraft pro Tiefeneinheit, die auf die Ebene wirkt, wenn auf der Unterseite der Druck $p_\infty$ herrscht – zu welcher Beziehung vereinfacht sich der Ausdruck für die Kraft für $h \gg 1$ ?
5. Diskussion des Stromlinienbildes.
6. Wie schnell müssen sich zwei gleichstarke, gegendrehende parallele Wirbelfäden bewegen, damit sie auf zur $x$-Achse parallelen Bahnen laufen?




### 1.2.1 Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential

Das komplexe Potential setzt sich aus einer Parallelströmung und den zwei nach dem Spiegelungsprinzip angeordneten gegendrehenden Potentialwirbeln zusammen:

$$F(z) = u_\infty z - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z - ih) - i\frac{(-\Gamma)}{2\pi}\ln(z - (-ih))$$

Für $(z - ih)$ setzen wir $r_1 e^{i\varphi_1}$ und für $(z + ih)$ setzen wir $r_2 e^{i\varphi_2}$. Es gilt $r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$, $r_2 = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$, $\varphi_1 = \arctan\frac{y-h}{x}$ bzw. $\varphi_2 = \arctan\frac{y+h}{x}$.

$$F(z) = \Phi + i\Psi \quad \rightarrow \quad \Phi = \mathrm{Re(F(z))}, \quad \Psi = \mathrm{Im(F(z))}$$

$$\Phi(r, \varphi) = u_\infty r\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi_1 - \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi_2$$

$$\Psi(r, \varphi) = u_\infty r\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r_1 + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r_2$$

### 1.2.2 Geschwindigkeiten $u(x,y)$ und $v(x,y)$

$$\Psi(x,y) = u_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+(y-h)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+(y+h)^2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad u(x,y) &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y+h}{x^2+(y+h)^2} \\ v(x,y) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2+(y-h)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2+(y+h)^2} \end{aligned}$$

Eine Überprüfung der Randbedingungen (Wand) zeigt:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_\infty + \frac{\Gamma h}{\pi(x^2+h^2)} \qquad \text{Bemerkung:} \quad x \to \pm\infty: \quad u \to u_\infty \\ v(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

### 1.2.3 Druckbeiwert $c_p$ an der Wand

Aus der Bernoulligleichung folgt:

$$\begin{aligned} & p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \\ & \rightarrow c_p(x,y) = \frac{p-p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \frac{\vec{v}^2}{u_\infty^2} = 1 - \frac{u^2+v^2}{u_\infty^2} \\ & \rightarrow c_p(x,0) = 1 - \frac{u(x,0)^2}{u_\infty^2} = -\frac{2\Gamma}{\pi u_\infty} \frac{h}{x^2+h^2} - \frac{\Gamma^2}{\pi^2 u_\infty^2} \frac{h^2}{(x^2+h^2)^2} \end{aligned}$$

### 1.2.4 Kraft pro Tiefeneinheit, die der Wirbel auf die Wand ausübt

**Impulsbilanz**

Mit $\vec{H}_W$ wird die Haltekraft der Wand bezeichnet. $\vec{F}_W = -\vec{H}_W$ ist die Kraft, die der Wirbel auf die Wand ausübt.

$$\underbrace{\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v} \, \mathrm{d}O}_{0} = - \oint_{\partial \mathrm{KV}} p \vec{n} \, \mathrm{d}O + \vec{H}_W$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \vec{F}_W &= - \oint_{\partial \mathrm{KV}} p \vec{n} \, \mathrm{d}O = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} t \, \mathrm{d}s \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p_\infty (-\vec{e}_y) \, \mathrm{d}x t}_{\text{Unterseite}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p(x,0) \vec{e}_y \, \mathrm{d}x t}_{\text{Oberseite}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{F_{Wy}}{t} &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (-p_\infty + p(x,0))\,\mathrm{d}x = -\frac{\rho}{2}u_\infty^2 \int_{-\infty}^{+\infty} c_p(x,0)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\rho}{2}u_\infty^2 \left\{ -\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\Gamma}{\pi u_\infty}\frac{h}{x^2+h^2} + \frac{\Gamma^2}{\pi^2 u_\infty^2}\frac{h^2}{(x^2+h^2)^2} \right) \mathrm{d}x \right\} \\
&= \frac{\rho}{2}u_\infty^2 \left\{ \frac{2\Gamma}{u_\infty} + \left(\frac{\Gamma h}{\pi u_\infty}\right)^2 \frac{\pi}{2h^3} \right\} \\
&= \rho u_\infty \Gamma + \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: für $h \to \infty$ : $F_{Wy} \neq 0$

### 1.2.5 Fortschrittsgeschwindigkeit zweier gleichstarker, gegendrehender, paralleler Wirbelfäden

**Impulsbilanz**

$$
\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O = -\rho u_\infty^2 A\vec{e}_x + \rho u_\infty^2 A \vec{e}_x = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O &= \underbrace{\oint_{\partial KV} p_\infty \vec{n}\,\mathrm{d}O}_{0} - \int_G p_\infty \vec{n}\,\mathrm{d}O + \int_G p\vec{n}\,\mathrm{d}O \\
&= \int_G (p - p_\infty)(-\vec{e}_y)\,\mathrm{d}O = -\vec{e}_y \underbrace{\int_G (p(x,0) - p_\infty) t\,\mathrm{d}x}_{-F_{Wy}}
\end{aligned}
$$

Aus der Forderung $F_{Wy} = 0$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\rho u_\infty \Gamma + \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} &= 0 \\
\rightarrow \quad u_\infty &= -\frac{\Gamma}{4\pi h}
\end{aligned}
$$