0.1 Rankine Körper.

Man untersuche die ebene, stationäre und inkompressible Umströmung eines Rankine-Körpers durch Überlagerung einer Quelle im Ursprung und einer Parallelströmung in x-Richtung.
Gesucht sind:

1. Potentialfunktion ϕ und Stromfunktion ψ,
2. die Geschwindigkeitskomponenten u und v,
3. die Koordinaten des Staupunkts S,
4. die Gleichung der Stromlinie durch den Staupunkt S,
5. die Dicke b des Körpers für $x \to +\infty$,
6. die Druckverteilung am Rankine-Körper in Form des Druckbeiwertes c_p,
7. die Kraft $\vec{F}_Q$, mit der die Quelle gehalten werden müßte,
8. die Kraft $\vec{F}_H$, mit der ein materiell ausgeführter Körper zu halten wäre.

0.1.1 Potentialfunktion Φ und Stromfunktion Ψ

Wir verwenden das komplexen Potential. Dessen Realteil von der Potentialfunktion gebildet, während die Stromfunktion den Imaginärteil repräsentiert.
Das komplexe Potential setzt sich in unserem Fall aus einer Parallelströmung und einer Quelle im Ursprung zusammen:

$$F(z) = \underbrace{u_\infty z}_{\text{Parallelströmung}} + \underbrace{\frac{q}{2\pi}\ln z}_{\text{Quelle im Ursprung}} = \underbrace{\Phi(x,y)}_{\text{Potential-}} + i \underbrace{\Psi(x,y)}_{\text{Stromfunktion}}$$

Zuerst führen wir eine Transformation auf Polarkoordinaten durch:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \to \quad z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i(\varphi+2\pi n)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad F(r,\varphi) &= u_\infty r e^{i(\varphi+2\pi n)} + \frac{q}{2\pi}\ln\left(re^{i(\varphi+2\pi n)}\right) \\
&= u_\infty r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) + \frac{q}{2\pi}\left[\ln r + i\left(\varphi + 2\pi n\right)\right] \\
&= \Phi(r,\varphi) + i\Psi(r,\varphi) \\
\to \quad \Phi(r,\varphi) &= \mathrm{Re}(F) = u_\infty r\cos\varphi + \frac{q}{2\pi}\ln r \\
\to \quad \Psi(r,\varphi) &= \mathrm{Im}(F) = u_\infty r\sin\varphi + \frac{q}{2\pi}\left(\varphi + 2\pi n\right)
\end{aligned}$$

Rücktransformation in kartesische Koordinaten mittels

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}\,.$$

0.1.2 Geschwindigkeitskomponenten u und v

$$\begin{aligned}
F'(z) &= u - iv \\
&= u_\infty + \frac{q}{2\pi}\frac{1}{z} \\
&= u_\infty + \frac{q}{2\pi r} e^{-i(\varphi+2\pi n)} \\
&= u_\infty + \frac{q}{2\pi r}\left[\cos\left(-\left(\varphi+2\pi n\right)\right) + i\sin\left(-\left(\varphi+2\pi n\right)\right)\right] \\
&= u_\infty + \frac{q}{2\pi r}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad u(r,\varphi) &= \quad \mathrm{Re}(F') = u_\infty + \frac{q}{2\pi r}\cos\varphi \\
v(r,\varphi) &= -\mathrm{Im}(F') = \qquad \frac{q}{2\pi r}\sin\varphi
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned}
r \rightarrow +\infty : \quad & u \rightarrow u_\infty \\
& v \rightarrow 0 \\
& \ldots \quad \text{Parallelströmung}
\end{aligned}$$

0.1.3 Koordinaten des Staupunkts:

Bedingung:
Die Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ im Staupunkt S ist 0, d.h. $u_S = 0$ und $v_S = 0$.

$$\begin{aligned}
v_S &= \frac{q}{2\pi r_S}\sin\varphi_S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_S = m\pi \quad \forall m \in \mathbf{Z} \\
u_S &= u_\infty + \frac{q}{2\pi r_S}\cos\varphi_S \\
&= u_\infty + \frac{q}{2\pi r_S}(-1)^m \\
&= 0 \\
\Rightarrow \quad r_S &= -\frac{q}{2\pi u_\infty}(-1)^m > 0 \quad \rightarrow \quad m \text{ muß ungerade sein; wir wählen } m = 1 \\
\rightarrow \quad r_S &= \frac{q}{2\pi u_\infty}, \quad \varphi_S = \pi \\
\text{bzw.} \quad x_S &= -\frac{q}{2\pi u_\infty}, \quad y_S = 0
\end{aligned}$$

0.1.4 Gleichung der Stromlinie $r_K(\varphi)$ durch den Ursprung (Körperkontur)

Der Logarithmus im Komplexen ist nicht eindeutig:
$\ln z = \ln\left(re^{i(\varphi+2\pi n)}\right) = \ln r + i\left(\varphi + 2\pi n\right)$ (siehe Stromfunktion Ψ). Durch die Wahl von

$\varphi \in [0\,, 2\pi\,[$ folgt $n = 0$.
Der Wert der Stromfunktion im Staupunkt ergibt sich dadurch zu

$$\varphi_S = \pi \quad \rightarrow \quad \Psi_S = u_\infty r_S \sin\varphi_S + \frac{q}{2\pi}\varphi_S = \frac{q}{2}$$

Die Gleichung der Stromlinie durch den Staupunkt folgt aus der Bedingung $\Psi_K(r_K, \varphi) = \Psi_S(r_S, \varphi_S)$:

$$u_\infty r_K(\varphi)\sin\varphi + \frac{q}{2\pi}\varphi = \frac{q}{2} \quad \rightarrow \quad r_K(\varphi) = \frac{q}{2\pi u_\infty}\frac{\pi - \varphi}{\sin\varphi} = r_S\frac{\pi - \varphi}{\sin\varphi}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow 0 \quad &: \quad r \rightarrow \infty \\ \varphi \rightarrow \pi \quad &: \quad r \rightarrow r_S \\ \varphi \rightarrow 2\pi \quad &: \quad r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Bemerkung: $\left.\dfrac{\pi - \varphi}{\sin\varphi}\right|_{\varphi=\pi} = 1\ !$

0.1.5 Dicke b des Körpers für $x \rightarrow \infty$

1. Möglichkeit:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u\,\mathrm{d}y = u_\infty b$$

$$\begin{aligned} \text{bzw.} \quad u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u\,\mathrm{d}y &= \int_{\Psi_S}^{\Psi_{\varphi=2\pi}} \mathrm{d}\Psi + \int_{\Psi_{\varphi=0}}^{\Psi_S} \mathrm{d}\Psi \\ &= \Psi_{2\pi} - \Psi_S + \Psi_S - \Psi_0 \\ &= \Psi_{2\pi} - \Psi_0 \\ &= q \\ \Rightarrow \quad u_\infty b = q \quad &\rightarrow \quad b = \frac{q}{u_\infty} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} b = 2\cdot y|_{\varphi\rightarrow 0 \text{ bzw. } r\rightarrow+\infty} &= \lim_{\varphi\rightarrow 0} 2r_K(\varphi)\sin\varphi \\ &= \lim_{\varphi\rightarrow 0} 2r_S\frac{\pi-\varphi}{\sin\varphi}\sin\varphi \\ &= 2r_S\pi \\ &= \frac{q}{u_\infty} \end{aligned}$$

3. Möglichkeit:
Für $x \to +\infty$ klingt die Störung ab, d.h. $u \to u_\infty$ und es gilt

$$\dot{V} = u_\infty b = q \quad \to \quad b = \frac{q}{u_\infty}$$

0.1.6 Druckverteilung am Rankine-Körper mittels Druckbeiwert c_p

Aus der Bernoulligleichung folgt mit $\vec{v}_\infty = u_\infty \vec{e}_x$

$$\begin{aligned}
& p + \frac{\varrho}{2}\vec{v}^2 = p_\infty + \frac{\varrho}{2}\vec{v}_\infty^2 \\
\to \quad & p - p_\infty = \frac{\rho}{2}\vec{v}_\infty^2 - \frac{\rho}{2}\vec{v}^2 \quad \Rightarrow \quad c_p\left(r, \varphi\right) := \frac{p - p_\infty}{\frac{\varrho}{2}\vec{v}_\infty^2} = 1 - \frac{\vec{v}^2}{\vec{v}_\infty^2} \\
\to \quad & c_p(r, \varphi) = 1 - \frac{\vec{v}^2}{\vec{v}_\infty^2} \\
& \qquad = 1 - \frac{u^2 + v^2}{u_\infty^2} \\
& \qquad = -\frac{q}{\pi r u_\infty}\cos\varphi - \left(\frac{q}{2\pi r u_\infty}\right)^2
\end{aligned}$$

Für die Konturlinie gilt $r_K(\varphi) = r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin\varphi}$. Der Druckbeiwert auf der Konturlinie c_{pK} lautet daher

$$\begin{aligned}
c_{pK} &= -\frac{q}{\pi r_S u_\infty} \cdot \frac{\overbrace{\sin\varphi\cos\varphi}^{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}}{\pi - \varphi} - \underbrace{\left(\frac{q}{2\pi u_\infty r_S}\right)^2}_{1} \cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\pi - \varphi}\right)^2 \\
&= -\frac{\sin\left(2\varphi\right)}{\pi - \varphi} - \left(\frac{\sin\varphi}{\pi - \varphi}\right)^2
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für $\varphi = \pi$ ist $c_{pK} = -\left(-2\right) - 1^2 = 1 > 0$.

0.1.7 Kraft $\vec{F}_Q$, mit der die Quelle gehalten werden muß

Wir wählen das Kontrollvolumen KV folgendermaßen:

1. Linker Rand mit Höhe a bei $x \to -\infty$
2. Oberer Rand entlang einer Stromlinie
3. Rechter Rand bei $x \to +\infty$
4. Unterer Rand entlang einer Stromlinie

Das Kontrollvolumen soll die Tiefe t haben.

Abstand Körperkontur – Stromlinie des Kontrollvolumens

Der durch den linken senkrechten Rand einströmende Volumenstrom muß zur Gänze am rechten Rand zwischen den außen liegenden Stromlinien und der Körperkontur wieder abtransportiert werden, da über Stromlinien hinweg kein Volumen transportiert werden kann. Da wir hier eine inkompressible Strömung betrachten, so muß der gesuchte Abstand gleich $\frac{a}{2}$ sein.

Impulssatz

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O + \oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = \vec{F}_Q$$

Beiträge zum konvektiven Integral $\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O$ des Impulssatzes liefern nur der linke und rechte Rand 1.und 3.. Dabei ist auf die Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ zu achten, der konventionsgemäß aus dem Kontrollvolumen herauszeigt:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O &= \underbrace{\rho(-u_\infty)u_\infty \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} at}_{\text{linker Rand 1.}} + \underbrace{\rho(+u_\infty)u_\infty \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \left(2\frac{a}{2}+b\right) t}_{\text{rechter Rand 3.}}\\ &= \rho u_\infty^2 bt \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Für die Berechnung des Druckanteils $\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O$ nehmen wir an, daß die obere und untere Berandung 2. und 4. des Kontrollvolumens auch im Unendlichen liegt ($a \to \infty$). Dann herrscht entlang der Oberfläche des gesamten Kontrollvolumens der Druck p_∞.

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O &= \lim_{a\to\infty} \oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O\\ &= p_\infty \underbrace{\oint_{\partial \mathrm{KV}} \vec{n}\,\mathrm{d}O}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Bemerkung: Das Oberflächenintegral des Normalvektors $\vec{n}$ über eine geschlossene Kurve ergibt immer 0.

Einsetzen der beiden Integrale und Auflösen nach $\vec{F}_Q$ liefert:

$$\vec{F}_Q = \rho u_\infty^2 bt \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

bzw. auf die Längeneinheit t bezogen:

$$\frac{\vec{F}_Q}{t} = \rho u_\infty^2 b \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Die Haltekraft $\vec{F}_Q$ der Quelle zeigt (eigentlich unerwarteterweise) in Richtung der positiven x-Achse, d.h. die Quelle würde sich bei Fehlen dieser Kraft stromaufwärts bewegen!

0.1.8 Kraft $\vec{F}_H$, mit der ein materiell ausgeführter Körper zu halten wäre

Zwischen der Körperkontur soll jetzt ein fester Körper eingefügt werden. Das Kontrollvolumen KV nehme den Körper aus, d.h. der rechte Rand verlaufe entlang der Körperoberfläche.

1. Möglichkeit:
Impulsbilanz

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O + \oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = 0$$

Bemerkung: Es gibt keinen umströmten Körper *im* Kontrollvolumen, d.h. auf der rechten Seite der Impulsbilanz ist $\vec{F}_K = 0$!

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O = \underbrace{\rho\,(-u_\infty)\,u_\infty \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} at}_{\text{linker Rand 1.}} + \underbrace{\rho\,(+u_\infty)\,u_\infty \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\left(2\frac{a}{2}\right) t}_{\text{rechter Rand 3.}}$$
$$= 0$$

Zur Berechnung des Druckintegrals $\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O$ wenden wir folgenden Trick an:

1. Wir berechnen das Integral $\oint_{\partial \mathrm{KV}} p_\infty \vec{n}\,\mathrm{d}O$ über das gesamte Kontrollvolumen.
2. Dieses ist um den Anteil der Körperoberfläche A_K zu groß (auf der Körperoberfläche herrscht ja nicht der Umgebungsdruck); deshalb ziehen wir $\int_{\partial A_K} p_\infty \vec{n}\,\mathrm{d}O$ wieder ab .
3. Jetzt müssen wir nur noch den auf der Körperoberfläche herrschenden Druck dazurechnen. Das Integral $\int_{\partial A_K} p_K \vec{n}\,\mathrm{d}O$ ist die Kraft vom Medium auf den Körper!

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = \underbrace{\oint_{\partial \mathrm{KV}} p_\infty \vec{n}\,\mathrm{d}O}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial A_K} p_\infty \vec{n}\,\mathrm{d}O}_{=p_\infty bt\binom{1}{0}} + \underbrace{\int_{\partial A_K} p_K \vec{n}\,\mathrm{d}O}_{=-\vec{F}_H}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0 - p_\infty bt \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \vec{F}_H$$

$$\frac{\vec{F}_H}{t} = -p_\infty b \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Die Kraft $\vec{F}_H$ ist die Kraft, mit der der Körper gehalten werden muß. Also erfährt der Körper eine Kraft in Richtung der positiven x-Achse, d.h. stromabwärts!

2. Möglichkeit: über die Druckverteilung $p_K(\varphi)$
Die Gesamtkraft auf die Oberfläche des Körpers $\vec{F}_O$:

$$\vec{F}_O = \int_{A_K} p_K(\varphi)\vec{n}(s)\underbrace{\mathrm{d}O}_{\mathrm{d}s\cdot t}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$F_{Oy} = 0,$$

d.h. wir können uns auf die x-Komponente beschränken:

$$\frac{F_{Ox}}{t} = \int_{A_K} p_K(\varphi) n_x(s)\,\mathrm{d}s$$

Die Haltekraft $\vec{F}_H$ des materiell ausgefüllten Körpers ist der Druckkraft $\vec{F}_O$ entgegengesetzt:

$$\vec{F}_H = -\vec{F}_O$$

Berechnung von $n_x(s)$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt immer aus dem Kontrollvolumen heraus und ist normal zum Tangentialvektor $\mathrm{d}\vec{r}$:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{n} \perp \mathrm{d}\vec{r}: \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

Der Normalvektor muß die Länge 1 haben. Die einfachste Art, dies zu erreichen, ist durch die Länge des Vektors $|\mathrm{d}\vec{n}| = |\mathrm{d}\vec{r}| = |\mathrm{d}\vec{s}| = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}s$ zu dividieren:

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \\ -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \text{Einheitsnormalvektor}$$

mit der x-Komponente:

$$n_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

Einsetzen in F_{Hx}:

$$\frac{F_{Hx}}{t} = -\int_{A_K} p_K(\varphi) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = -\int_{A_K} p_K(\varphi)\,\mathrm{d}y$$

Um dieses Integral zu lösen, müssen wir über y integrieren. Wir haben unsere Druckverteilung p_K jedoch als Funktion von φ gegeben. Deshalb haben wir $\mathrm{d}y$ in $\mathrm{d}\varphi$ umzurechnen.

Berechnung von $\mathrm{d}y$**:**

In der Formel von $\mathrm{d}\vec{r}$ hatten wir schon das $\mathrm{d}y$ (die y-Komponente des Vektors!). Dividieren wir durch $\mathrm{d}\varphi$ so erhalten wir die gewünschte Abhängigkeit von φ:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Hätten wir $\vec{r}(\varphi)$, so können wir uns daraus $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ berechnen und haben mit der y-Komponente unser gesuchtes $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$:

$$\vec{r} = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Wir brauchen nur die y-Komponente:

$$\begin{aligned} y(\varphi) &= r_S\,(\pi - \varphi) \\ \rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = -r_S = -\frac{q}{2\pi u_\infty} \\ \rightarrow \quad \mathrm{d}y &= -\frac{q}{2\pi u_\infty}\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Einsetzen in F_{Hx}:

$$\frac{F_{Hx}}{t} = \int_{A_K} p_K(\varphi) \frac{q}{2\pi u_\infty}\,\mathrm{d}\varphi$$

mit $p_K(\varphi)$ von oben:

$$\begin{aligned} \frac{F_{Hx}}{t} &= \frac{q}{2\pi u_\infty} \int_{A_K} \left(p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} c_{pK}(\varphi) \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{q}{2\pi u_\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} p_\infty\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\rho u_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} c_{pK}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \right\} \end{aligned}$$

mit $c_{pK}(\varphi)$ von oben:

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{2\pi u_\infty} p_\infty \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi + \frac{q\rho u_\infty}{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin 2\varphi}{\pi - \varphi} - \left(\frac{\sin\varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 \right] \mathrm{d}\varphi}_{=0} \\ &= \frac{q}{2\pi u_\infty} p_\infty \varphi \Big|_0^{2\pi} \\ &= \underbrace{\frac{q}{u_\infty}}_{=b}\, p_\infty \\ \frac{F_{Hx}}{t} &= p_\infty b \end{aligned}$$