

Korrektur zu Bsp. 2.2: Herleitung von c_p

Zusammenhang c_p und Geschwindigkeitsstörungen:

$$c_p(x, y) = -2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y)$$

Herleitung

Ausgehend vom Energiesatz, kompressibel, reibungsfrei

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{u_\infty^2}{2}$$

folgt durch Umformen

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) = \frac{u_\infty^2}{2} - \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Linearisieren unter der Voraussetzung kleiner Geschwindigkeitsstörungen $|(u - u_\infty)/u_\infty| \ll 1$, $|v/u_\infty| \ll 1$ ergibt für den rechten Term in der obigen Gleichung mit dem Ansatz $u = u_\infty + (u - u_\infty)$

$$\frac{u_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{(u_\infty + (u - u_\infty))^2}{u_\infty^2} - \frac{v^2}{u_\infty^2} \right) \sim \frac{u_\infty^2}{2} \left(-2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty} + \dots \right).$$

Der linke Term wird mit Hilfe der Isentropenbeziehung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_\infty} \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{1/\kappa}$$

geschrieben als

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho_\infty} \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{1/\kappa} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left(\left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right).$$

Nun wird wieder linearisiert unter der Voraussetzung $|(p - p_\infty)/p_\infty| \ll 1$ und dem Ansatz $p = p_\infty + (p - p_\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left(\left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right) &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left(\left(\frac{p_\infty + (p - p_\infty)}{p_\infty} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right) \sim \\ &\sim \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{p - p_\infty}{p_\infty} + \dots - 1 \right) \sim \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty} + \dots \end{aligned}$$

Somit folgt das Ergebnis

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2 / 2} = -2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty}.$$