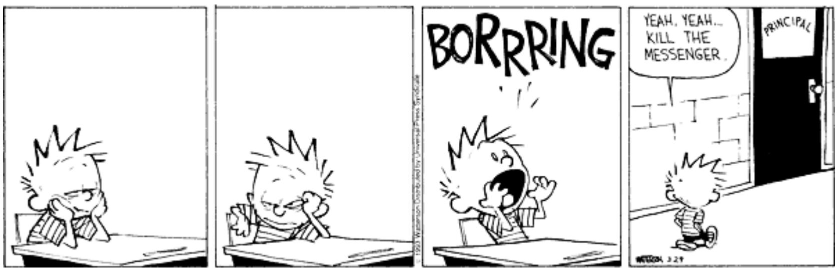


Rechenbeispiele zur VU Strömungen realer Fluide

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung
E322

Christian Hauser

29. Jänner 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Schallgeschwindigkeit.

Leiten Sie ausgehend von der Definition der Schallgeschwindigkeit eine brauchbare Formel zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit eines beliebigen Fluids ausgehend von der üblichen thermischen Zustandsgleichung $p\left(v,T\right)$ her.
Die Schallgeschwindigkeit für ein beliebiges Gas ergibt sich mit

$$a^2 = \left(\frac{\partial p\left(v,T\right)}{\partial \varrho}\right)_s$$

unter Verwendung von $v = \frac{1}{\varrho}$ folgt

$$a^2 = -v^2 \left(\frac{\partial p\left(v,T\right)}{\partial v}\right)_s .$$

Diese Beziehung kann kurz auch in Form von $a^2 = -v^2 p_v\left(v,s\right)$ geschrieben werden. Es muss nun nur noch eine Beziehung zwischen $p_v\left(v,s\right)$ und der üblichen thermischen Zustandsgleichung $p = p\left(v,T\right)$ gefunden werden. Dazu bilden wir in beiden Fällen das totale Differential,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= p_v\left(v,s\right)\,\mathrm{d}v + p_s\left(v,s\right)\,\mathrm{d}s, \\ \mathrm{d}p &= p_v\left(v,T\right)\,\mathrm{d}v + p_T\left(v,T\right)\,\mathrm{d}T. \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert bei konstanter Entropie $s = \mathrm{const} \rightarrow \mathrm{d}s = 0$

$$\begin{aligned} p_v\left(v,s\right)\,\mathrm{d}v &= p_v\left(v,T\right)\,\mathrm{d}v + p_T\left(v,T\right)\,\mathrm{d}T, \quad \text{bzw.} \\ p_v\left(v,s\right) &= p_v\left(v,T\right) + p_T\left(v,T\right)\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s . \end{aligned}$$

Den entsprechenden Ausdruck für $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s$ finden wir durch Bilden des totalen Differentials der Entropie,

$$\mathrm{d}s = s_v\left(v,T\right)\,\mathrm{d}v + s_T\left(v,T\right)\,\mathrm{d}T, \quad \text{bzw.}$$

Für den Fall konstanter Entropie sowie unter Verwendung bekannter thermodynamischer Relationen (siehe z.B. E.Becker, „Technische Thermodynamik"), erhalten wir

$$0 = p_T\left(v,T\right)\,\mathrm{d}v + \frac{c_v\left(v,T\right)}{T}\,\mathrm{d}T,$$
$$\rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{T}{c_v\left(v,T\right)}p_T\left(v,T\right).$$

Somit folgt für unsere gesuchte Größe $p_v\left(v,s\right)$

$$p_v\left(v,s\right) = p_v\left(v,T\right) - \frac{T}{c_v\left(v,T\right)}p_t^2\left(v,T\right)$$

und die Schallgeschwindigkeit ist schließlich

$$a^2 = -v^2 p_v\left(v,s\right) = -v^2\left(p_v\left(v,T\right) - \frac{T}{c_v\left(v,T\right)}p_T^2\left(v,T\right)\right)$$

1.2 Ideales Gas.

Berechnen Sie Schallgeschwindigkeit und gasdynamische Fundamentalableitung für ein ideales Gas.

1.2.1 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit für ein beliebiges Gas ergibt sich mit

$$a^2 = \left(\frac{\partial p\left(v,T\right)}{\partial \varrho}\right)_s$$

unter Verwendung von $v = \frac{1}{\varrho}$ und $p = \frac{1}{v}RT$ folgt

$$\begin{aligned}
a^2 &= -v^2\left(\frac{\partial p\left(v,T\right)}{\partial v}\right)_s = -v^2\left(p_v\left(v,T\right) - \frac{T}{c_v\left(v,T\right)}p_T^2\left(v,T\right)\right)\\
a^2 &= -v^2\left(-\frac{RT}{v^2} - \frac{T}{c_v\left(v,T\right)}\frac{R^2}{v^2}\right)\\
&= RT\left(1 + \frac{R}{c_v\left(v,T\right)}\right) = RT\frac{c_v\left(v,t\right)+R}{c_v\left(v,T\right)}\\
a^2 &= RT\frac{c_p}{c_v} = \kappa RT
\end{aligned}$$

1.2.2 gasdynamische Fundamentalableitung

Die gasdynamische Fundamentalableitung errechnet sich unter Verwendung der Zustandsgleichung in der Form $p = p\,(v, T)$ gemäß

$$\Gamma = \frac{v^3}{2a^2}\left\{p_{vv} - \frac{3T}{c_v}p_T p_{vT} + \left(\frac{Tp_T}{c_v}\right)^2\left[3p_{TT} + \left(1 + \frac{T}{c_v}\frac{\partial c_v}{\partial T}\right)\frac{p_T}{T}\right]\right\}$$

$$\Gamma = \frac{v^3}{2\kappa RT}\left(2\frac{RT}{v^3} + \frac{3T}{c_v}\frac{R}{v}\frac{R}{v^2} + \left(\frac{RT}{v\;c_v}\right)^2\frac{R}{vT}\right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\kappa}\left(2 + \frac{R}{c_v}\frac{2c_v + c_v + R}{c_v}\right) = \frac{1}{2\kappa}\left(2 + \frac{R}{c_v}\frac{2c_v + c_p}{c_v}\right) = \frac{1}{2\kappa}\left(2 + \frac{R}{c_v}\,(2+\kappa)\right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\kappa}\frac{2c_v + 2R + R\kappa}{c_v} = \frac{1}{2\kappa}\frac{2c_p + R\kappa}{c_v} = \frac{1}{2\kappa}\left(2\kappa + \frac{R}{c_v}\kappa\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{R}{c_v}\right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\frac{2c_v + R}{c_v} = \frac{1}{2}\frac{c_v + c_p}{c_v} = \frac{1}{2}\,(1+\kappa)$$

$$\Gamma = \frac{\kappa + 1}{2}$$

1.3 Van der Waals Gas.

Berechnen Sie Schallgeschwindigkeit und gasdynamische Fundamentalableitung für ein Van der Waals Gas.

1.3.1 Grundlagen

Die Zustandsgleichung eines Van der Waals Gases lautet

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{\alpha}{v^2}$$

mit den beiden Konstanten

$$b = \frac{RT_c}{8p_c} \qquad \text{und} \qquad \alpha = \frac{27}{64}\frac{R^2T_c^2}{p_c},$$

wobei T_c die kritische Temperatur und p_c der kritische Druck ist. für das kritische spezifische Volumen v_c findet man zusätzlich die Beziehung $v_c = 3b$. Insgesamt ergibt sich für den Kompressibilitätsfaktor bei den kritischen Größen

$$Z = \frac{p_c v_c}{RT_c} = \frac{3}{8}$$

Die Ableitungen der Zustandsgleichung nach den Zustandsgrößen lauten

$$p_v\,(v,T) = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2\alpha}{v^3} \qquad p_T\,(v,T) = \frac{R}{v-b}$$

$$p_{vv}(v,T) = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6\alpha}{v^4} \qquad p_{TT}(v,T) = 0$$

$$p_{vT}(v,T) = -\frac{R}{(v-b)^2} \qquad \frac{\partial c_v}{\partial T} = 0 \rightarrow \text{lt. Vorraussetzung}$$

1.3.2 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit für ein beliebiges Fluid errechnet sich aus der thermischen Zustandsgleichung $p = p(v,T)$ gemäß

$$a^2 = -v^2 \left(p_v(v,T) - \frac{T}{c_v(v,T)} p_T^2(v,T) \right).$$

Setzt man die entsprechenden Ableitungen in die Gleichung ein, so erhält man

$$a^2 = -v^2 \left(-\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2\alpha}{v^3} - \frac{T}{c_v(v,T)} \frac{R^2}{(v-b)^2} \right).$$

Diesen Ausdruck kann man noch vereinfachen,

$$a^2 = \frac{RTv^2}{(v-b)^2} - \frac{2\alpha}{v} + \frac{T}{c_v(v,T)} \frac{R^2 v^2}{(v-b)^2}$$

$$a^2 = \frac{RTv^2}{(v-b)^2} \left(1 + \underbrace{\frac{R}{c_v(v,T)}}_{\delta} \right) - \frac{2\alpha}{v}$$

$$\frac{a^2}{RT} = \frac{v^2}{(v-b)^2}(1+\delta) - \frac{2\alpha}{RTv}$$

Setzt man nun noch die entsprechenden Ausdrücke für b und α ein, so erhalten wir

$$\frac{a^2}{RT} = \frac{v^2}{\left(v - \frac{v_c}{3}\right)^2}(1+\delta) - \frac{2 \cdot 27 R^2 T_c^2}{64 p_c R T v}$$

herausgehoben und gekürzt verbleibt

$$\frac{a^2}{RT} = \frac{9}{\left(3 - \frac{v_c}{v}\right)^2}(1+\delta) - \frac{27}{32} \underbrace{\frac{RT_c}{p_c}}_{\frac{8}{3}v_c} \frac{T_c}{T} \frac{1}{v}$$

$$\frac{a^2}{RT} = \frac{9}{\left(3 - \frac{v_c}{v}\right)^2}(1+\delta) - \frac{9}{4} \frac{T_c}{T} \frac{v_c}{v}.$$

Verwendet man nun an Stelle der absoluten Größen die dimensionslosen reduzierten Größen $v_r = \frac{v}{v_c}$, $p_r = \frac{p}{p_c}$ und $T_r = \frac{T}{T_c}$, so erhalten wir endgültig:

$$a^2 = \frac{9RT_c}{4} \left(\frac{4 T_r v_r^2}{(3v_r - 1)^2}(1+\delta) - \frac{1}{v_r} \right)$$

1.3.3 gasdynamische Fundamentalableitung Γ

Die gasdynamische Fundamentalableitung, das Maß für die Krümmung der Isentropen im p-v-Diagramm, errechnet sich unter Verwendung der Zustandsgleichung in der Form $p = p(v, T)$ gemäß

$$\Gamma = \frac{v^3}{2a^2}\left\{p_{vv} - \frac{3T}{c_v}p_T p_{vT} + \left(\frac{Tp_T}{c_v}\right)^2\left[3p_{TT} + \left(1 + \frac{T}{c_v}\frac{\partial c_v}{\partial T}\right)\frac{p_T}{T}\right]\right\}.$$

Setzt man wieder die entsprechenden Ableitung ein, so erhält man

$$\Gamma = \frac{v^3}{2a^2}\left\{\frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6\alpha}{v^4} - \frac{3T}{c_v}\frac{R}{v-b}\frac{-R}{(v-b)^2} + \left(\frac{RT}{c_v(v-b)}\right)^2\left[3\cdot 0 + \left(1 + \frac{T}{c_v}0\right)\frac{R}{T(v-b)}\right]\right\}$$

Diesen Ausdruck kann man noch vereinfachen,

$$\Gamma = \frac{v^3}{2a^2}\left\{\frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6\alpha}{v^4} + \frac{R}{c_v}\frac{3RT}{(v-b)^3} + \left(\frac{RT}{c_v(v-b)}\right)^2\frac{R}{T(v-b)}\right\}$$

$$\Gamma = \frac{v^3}{2a^2}\left\{\frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6\alpha}{v^4} + \frac{R}{c_v}\frac{3RT}{(v-b)^3} + \frac{R^2}{c_v^2}\frac{RT}{(v-b)^3}\right\}$$

mit $\delta = \frac{R}{c_v}$

$$\Gamma = \frac{RT}{2a^2}\left\{\frac{v^3}{(v-b)^3}\left(2 + 3\delta + \delta^2\right) - \frac{6\alpha}{vRT}\right\}$$

Setzt man nun noch die entsprechenden Ausdrücke für b und α ein, so erhalten wir

$$\Gamma = \frac{RT}{2a^2}\left\{\frac{v^3}{\left(v - \frac{v_c}{3}\right)^3}\left(2 + 3\delta + \delta^2\right) - \frac{6\cdot 27R^2T_c^2}{64vp_cRT}\right\}$$

herausgehoben und gekürzt verbleibt

$$\Gamma = \frac{RT}{2a^2}\left\{\frac{27}{\left(3 - \frac{v_c}{v}\right)^3}\left(2 + 3\delta + \delta^2\right) - \frac{81}{32v}\frac{T_c}{T}\frac{RT_c}{p_c}\right\}$$

$$\Gamma = \frac{RT}{2a^2}\left\{\frac{27\left(\frac{v}{v_c}\right)^3}{\left(3\frac{v}{v_c} - 1\right)^3}\left(2 + 3\delta + \delta^2\right) - \frac{27}{4}\frac{T_c}{T}\frac{v_c}{v}\right\}$$

Verwendet man nun an Stelle der absoluten Größen die dimensionslosen reduzierten Größen $v_r = \frac{v}{v_c}$, $p_r = \frac{p}{p_c}$ und $T_r = \frac{T}{T_c}$, so erhalten wir endgültig:

$$\Gamma = \frac{27RT_c}{8a^2}\left[\frac{4T_r v_r^3}{(3v_r - 1)^3}\left(2 + 3\delta + \delta^2\right) - \frac{1}{v_r}\right]$$

Die Schallgeschwindigkeit eingesetzt liefert

$$\Gamma = \frac{27RT_c}{8\frac{9RT_c}{4}\left(\frac{4T_r v_r^2}{(3v_r-1)^2}(1+\delta) - \frac{1}{v_r}\right)}\left[\frac{4T_r v_r^3}{(3v_r - 1)^3}\left(2 + 3\delta + \delta^2\right) - \frac{1}{v_r}\right]$$

und mit Kürzen

$$\Gamma = \frac{3}{2}\frac{\frac{4T_r v_r^3}{(3v_r-1)^3}\left(2+3\delta+\delta^2\right)-\frac{1}{v_r}}{\frac{4T_r v_r^2}{(3v_r-1)^2}\left(1+\delta\right)-\frac{1}{v_r}}$$

$$\Gamma = \frac{3}{2}\frac{4T_r v_r^4\left(2+3\delta+\delta^2\right)-\left(3v_r-1\right)^3}{4T_r v_r^3\left(3v_r-1\right)\left(1+\delta\right)-\left(3v_r-1\right)^3}$$

Kapitel 2

Akustik

2.1 Mischungen Idealer Gase.

Berechnen Sie Schallgeschwindigkeit der Mischung von idealen Gasen. Als Beispiel sei Luft mit 78% N_2, 21% O_2 und 1% Ar angenommen.

2.1.1 Zustandsgleichung

Bevor die Schallgeschwindigkeit berechnet werden kann, muss man die Zustandsgleichung der Gasmischung kennen. Für jede Gaskomponente gilt natürlich die Zustandsgleichung des idealen Gases.

$$p_i V_i = m_i R_i T \qquad \text{mit } V = m_i v_i$$

die spezifische Gaskonstante der jeweiligen Komponente erhält man aus dem Quotienten der allgemeinen Gaskonstanten $\tilde{R} = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$ und der Molmasse M_i

$$R_i = \frac{\tilde{R}}{M_i}.$$

Somit ergibt sich für die Zustandsgleichung einer Komponente

$$p_i V_i = \tilde{R} \frac{m_i}{M_i} T = \tilde{R} N_i T$$

mit der Molzahl N_i der i-ten Komponente. Die Gesamtmasse der Mischung m ergibt sich dann mit

$$m = \sum_i N_i M_i = N M,$$

also aus der Gesamtmolzahl N und der Molmasse der Mischung M. Diese wird nach

$$M = \sum_i \frac{N_i}{N} M_i = \sum_i \chi_i M_i$$

berechnet, wobei gleich der Molenbruch $\chi_i = \frac{N_i}{N}$ eingeführt wurde. Die Zustandsgleichung der Gasmischung kann man nun mit

$$pv = \frac{\tilde{R}}{M}T = RT$$

angeben. Bevor nun die Schallgeschwindigkeit bestimmt werden kann, müssen noch die spezifischen Wärmen berechnet werden. Die Grundlage bilden

$$\begin{aligned} c_v m &= \sum_i c_{vi} m_i \qquad \rightarrow \qquad c_v = \sum_i c_{vi}\frac{m_i}{m}, \\ c_p m &= \sum_i c_{pi} m_i \qquad \rightarrow \qquad c_p = \sum_i c_{pi}\frac{m_i}{m}, \end{aligned}$$

wobei sich das Verhältnis $\frac{m_i}{m}$ aus

$$\frac{m_i}{m} = \frac{N_i M_i}{NM} = \chi_i \frac{M_i}{M}$$

ergibt. Damit folgt nun für die spezifischen Wärmen

$$\begin{aligned} c_v &= \sum_i \chi_i c_{vi}\frac{M_i}{M} \\ c_p &= \sum_i \chi_i c_{pi}\frac{M_i}{M} \end{aligned}$$

und für den Adiabatenexponent κ

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\sum\limits_i \chi_i c_{pi} M_i}{\sum\limits_i \chi_i c_{vi} M_i}.$$

Aufgrund von $R_i = c_{pi} - c_{vi} = \frac{\tilde{R}}{M_i}$ kann M_i auch als

$$M_i = \frac{\tilde{R}}{c_{pi} - c_{vi}}$$

und damit vereinfacht sich κ zu

$$\kappa = \frac{\sum\limits_i \chi_i \frac{c_{pi}}{c_{pi}-c_{vi}}}{\sum\limits_i \chi_i \frac{c_{vi}}{c_{pi}-c_{vi}}} = \frac{\sum\limits_i \chi_i \frac{\kappa_i}{\kappa_i-1}}{\sum\limits_i \chi_i \frac{1}{\kappa_i-1}}.$$

2.1.2 Schallgeschwindigkeit

Für ein ideales Gas gilt ja bei isentroper Zustandsänderung

$$pv^\kappa = \text{const.}$$

Damit ergibt sich die Schallgeschwindigkeit zu

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \kappa v^2 \frac{\mathrm{const}}{v^{\kappa+1}} = \kappa v \frac{\mathrm{const}}{v^{\kappa}} = \kappa p v = \kappa R T$$

Um nun die Schallgeschwindigkeit für Luft zu berechnen, müssen also zuerst der Adiabatenexponent und die spezifische Gaskonstante bestimmt werden. Aus der kinetischen Gastheorie κ mit

$$\kappa = \frac{f+2}{f}$$

bekannt, wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade des Gasteilchens ist. Für die angegebene Zusammensetzung der Luft ergibt sich deren Molmasse mit

$$M = \sum_i M_i \chi_i = 0.78 \cdot 28.02 + 0.21 \cdot 32 + 0.01 \cdot 39.95$$

$$M = 28.96 \frac{kg}{kmol}$$

Die spezifische Gaskonstante ist somit

$$R = \frac{\tilde{R}}{M} = \frac{8.134}{28.96} = 286.9 \frac{J}{kg\,K}$$

und der Adiabatenexponent κ folgt daher mit

$$\kappa = \frac{\sum_i \chi_i \frac{\kappa_i}{\kappa_i - 1}}{\sum_i \chi_i \frac{1}{\kappa_i - 1}} = \frac{0.78 \frac{7/5}{2/5} + 0.21 \frac{7/5}{2/5} + 0.01 \frac{5/3}{2/3}}{0.78 \frac{1}{2/5} + 0.21 \frac{1}{2/5} + 0.01 \frac{1}{2/3}}$$

$$\kappa = \frac{0.78 \cdot 3.5 + 0.21 \cdot 3.5 + 0.01 \cdot 2.5}{0.78 \cdot 2.5 + 0.21 \cdot 2.5 + 0.01 \cdot 1.5} = 1.402$$

Somit ergibt sich die Schallgeschwindigkeit für Luft bei $0\ °C = 273.15\ K$ mit

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1.402 \cdot 286.9 \cdot 273.15} = 331.45 m s^{-1}$$

2.2 Flüssigkeiten.

Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit von Wasser bei $0\ °C$.

2.2.1 Zustandsgleichung

Bevor die Schallgeschwindigkeit eines Fluids berechnet werden kann, muss man dessen Zustandsgleichung kennen. Für Flüssigkeiten kann nun nicht mehr die Annahme eines idealen Gases oder eines Van der Waals Gases getroffen werden, es kommt statt dessen die sogenannte Tait'sche Zustandsgleichung

$$\frac{p+B}{B} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma} \tag{2.1}$$

ins Spiel, wobei B und γ flüssigkeitsspezifische Konstante sind, die Tabelle 2.1 zu entnehmen sind.

Flüssigkeit	$B\,[atm]$	γ	$\varrho_0\,[kg/m^3]$
Wasser H_2O	3000	7.15	999.84
Tetrachlorkohlenstoff CCl_4	1000	9.35	1600
Quecksilber Hg	3000	8.2	13500
n-Heptan	654	10.6	684

Tabelle 2.1: Konstanten der Tait'schen Zustandsgleichung für verschiedene Flüssigkeiten.

2.2.2 Schallgeschwindigkeit Herleitung

Bei bekannter thermischer Zustandsgleichung $p = p\,(v, T)$ und bekannter spezifischer Wärmekapazität $c_v = c_v\,(v, T)$ soll erneut die Schallgeschwindigkeit berechnet werden. Dazu betrachten wir zuerst die Entropiedefinition,

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}v, \qquad T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}h - v\,\mathrm{d}p,$$

$$T\,\mathrm{d}s = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v}_{c_v}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\mathrm{d}v + p\,\mathrm{d}v, \qquad T\,\mathrm{d}s = \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p}_{c_p}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T\mathrm{d}p - v\,\mathrm{d}p,$$

$$T\,\mathrm{d}s = c_v\,\mathrm{d}T + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right)\mathrm{d}v, \qquad T\,\mathrm{d}s = c_p\,\mathrm{d}T + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right)\mathrm{d}p.$$

Setzt man nun Isentropie voraus, so erhält man direkt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s = -\frac{c_v}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p}, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s = -\frac{c_p}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v}.$$

Somit kann der bekannte Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s} = \frac{c_p}{c_v}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v}$$

Auf der anderen Seite kann man ähnliche Überlegungen ausgehend von der isothermen Zustandsänderung anstellen, was gleichbedeutend mit $T = \mathrm{const}$ bzw. $\mathrm{d}T = 0$ ist. Es gilt also

$$T\,\mathrm{d}s = \underbrace{c_v\,\mathrm{d}T}_{0} + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right)\mathrm{d}v, T\,\mathrm{d}s = \underbrace{c_p\,\mathrm{d}T}_{0} + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right)\mathrm{d}p,$$

woraus direkt

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right)\mathrm{d}v = \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right)\mathrm{d}p$$

folgt. Dementsprechend gilt

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v},$$

ein Ausdruck der allein aus der thermischen Zustandsgleichung folgt. Somit kann man den Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit weiter vereinfachen und wir erhalten

$$a^2 = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -v^2 \kappa \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \tag{2.2}$$

2.2.3 Schallgeschwindigkeit von Flüssigkeiten

Ausgehend von der Tait'schen Zustandsgleichung (2.1) erhalten wir für den Druck bzw. dessen isotherme Ableitung

$$p = B\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma - B$$
$$p = B\left(\frac{v_0}{v}\right)^\gamma - B$$
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\gamma B \left(\frac{v_0}{v}\right)^\gamma \frac{1}{v}.$$

Mit der Gleichung für die Schallgeschwindigkeit (2.2) erhalten wir schließlich

$$a^2 = -v^2 \kappa \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$$
$$a = \sqrt{\kappa v \gamma B \left(\frac{v_0}{v}\right)^\gamma}$$

Da aufgrund der Inkompressibilität der Flüssigkeiten im Allgemeinen nicht zwischen einem c_v und einem c_p unterschieden wird bzw. $\kappa \approx 1$ gilt, vereinfacht sich diese Beziehung weiter,

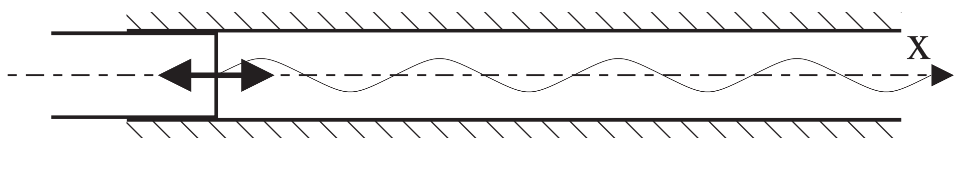
$$a = \sqrt{\frac{\gamma B}{\varrho}\frac{p+B}{B}} = \sqrt{\gamma \frac{p+B}{\varrho}}$$

Für Wasser ergibt sich nun die Schallgeschwindigkeit mit

$$a_{H_2O} = \sqrt{\frac{7.15 \cdot 3039 \cdot 10^5}{999.84}} = 1474.2 m s^{-1}$$

2.3 Einfache Wellen.

Man berechne die Geschwindigkeits- und Druckstörungen, die in einem einseitig offenen Rohr von einem beweglichen Kolben verursacht werden. Der Kolben führt seit $t = 0$ Schwinungen von $x = \varepsilon \cos \omega t$ durch und war davor in Ruhe. Es soll $\varepsilon \ll 1$ gelten. Weiters soll die Verschiebung eines Fluidteilchens in Folge der sich ausbreitenden Wellen berechnet werden.



2.3.1 Wellengleichung

Ausgehend von Kontinuitätsgleichung und den reibungsfreien Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

soll für den Fall schwacher Störungen, also den Bereich der linearen Akustik, die bestimmenden Gleichungen ermittlt werden, um die Ausbreitung der Geschwindigkeits- und Druckstörungen im oben angeführten Rohr zu berechnen. Da wir nur geringe Störungen annehmen wollen, können die Gleichungen linearisiert werden bzw. überhaupt um den Ruhezustand entwickelt werden,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Betrachten man nun kurz die Definition der Schallgeschwindigkeit

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{s=s_o} = a^2$$

so gilt naturgemäß

$$p - p_0 = a^2 (\varrho - \varrho_0)$$

Führt man nun die dimensionslose Dichtestörung $\tilde{\varrho}$ bzw. Druckstörung $\tilde{p}$

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = \tilde{\varrho} \qquad \frac{p - p_0}{\varrho_0 a^2} = \tilde{p}$$

ein, so erhält man aus der Folgerung der Schallgeschwindigkeitsdefinition die Gleichheit der beiden Störungen, die in Folge mit

$$S = \tilde{\varrho} = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = \tilde{p} = \frac{p - p_0}{\varrho_0 a^2}$$

abgekürzt werden. Mit dieser dimensionslosen Größe können die Gleichungen weiter umgeschrieben werden und wir erhalten

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial S}{\partial x_i}.$$

Führt man ein Potential für die Geschwindigkeit in der gewohnten Form $v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ ein, so können die vier Gleichungen mit vier Unbekannt auf zwei Gleichungen mit den unbkannten Größen S und ϕ reduziert werden,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_i}^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_i} = -a^2 \frac{\partial S}{\partial x_i}.$$

Wird die Bewegungsgleichung nun nach dem Ort integriert, so folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a^2 S + h(t). \tag{2.3}$$

Da im Unendlichen alle Störungen abgeklungen sein sollen, gilt $h(t) \equiv 0$ und es folgt mit der Elimination von S die Wellengleichung für der Geschwindigkeitspotential

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \phi = 0.$$

Die Lösung der Wellengleichung in den auf die Charakteristiken $\xi = x - at$ und $\eta = x + at$ für die rechtslaufenden und linkslaufenden Wellen transformierten Koordinaten ist auch bekannt d'Alembertsche Lösung. Es gilt

$$\phi = F(x - at) + G(x + at)$$

wobei die Funktion F die rechtslaufenden und G die linkslaufenden Wellen beschreibt.

2.3.2 Offenes Rohr - Geschwindigkeitsstörung

Im Fall einfacher Wellen, wie wir sie in diesem Beispiel vorliegen haben, gilt immer entweder $F \equiv 0$ oder $G \equiv 0$. Da wir es hier mit rechtslaufenden Wellen zu tun haben, folgt als Lösung für das einseitig offene Rohr

$$\phi = F(x - at)$$

Die Geschwindigkeitsstörung im Rohr ist mit

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = F'(x - at)$$

gegeben. Allerdings müssen wir auch die Randbedingung berücksichtigen, die in unserem Fall durch den bewegten Kolben vorgeschrieben ist. Durch die Annahme von $\varepsilon \ll 1$ kann die Kolbenbewegung näherungsweise auch am Ort der Ruhelage angenommen werden und wir erhalten die vereinfachte Randbedinung

$$u\,(x = 0, t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -\varepsilon\omega \sin \omega t & \ldots t \geq 0 \\ 0 & \ldots t < 0 \end{cases}$$

Die bereits angegebene Lösung muss natürlich auch die Randbedingung erfüllen, es gilt somit

$$u\,(x = 0, t) = F'(0 - at) = \begin{cases} -\varepsilon\omega \sin \omega t & \ldots t \geq 0 \\ 0 & \ldots t < 0 \end{cases}$$

mit der Schallgeschwindigkeit a erweitert und entsprechend umgeformt erhalten wir

$$F'(-at) = \begin{cases} -\varepsilon\omega \sin\left(-\frac{\omega}{a}\,(-at)\right) & \ldots t \geq 0 \\ 0 & \ldots t < 0 \end{cases}$$

bzw. verständlicher

$$F'(\xi)\big|_{x=0} = \begin{cases} -\varepsilon\omega \sin\left(-\frac{\omega}{a}\xi\right) & \dots t \geq 0 \\ 0 & \dots t < 0 \end{cases}$$

integriert liefert das nun

$$F(\xi) = \begin{cases} \varepsilon\omega \cos\left(-\frac{\omega}{a}\xi\right) \frac{-a}{\omega} & \dots \xi \leq 0 \\ 0 & \dots \xi > 0 \end{cases}$$

$$F(x-at) = \begin{cases} -\varepsilon a \cos -\omega\left(\frac{x}{a} - t\right) & \dots t \geq \frac{x}{a} \\ 0 & \dots t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

$$F(x-at) = \begin{cases} -\varepsilon a \cos \omega\left(\frac{x}{a} - t\right) & \dots t \geq \frac{x}{a} \\ 0 & \dots t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

Mit der Kreiswellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ bzw. der Dispersionsrelation $\omega = ak$ folgt die Geschwindigkeitsstörung im gesamten Rohr mit

$$u(x-at) = F'(x-at) = \begin{cases} \varepsilon\omega \sin k\,(x-at) & \dots x-at \leq 0 \\ 0 & \dots x-at > 0 \end{cases}$$

was natürlich auch die Randbedingung erfült.

2.3.3 Offenes Rohr - Druckstörung

Diese erhalten wir sofort durch Einsetzen der Lösung der Geschwindigkeitsstörung in Gleichung (2.3),

$$S = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{1}{a^2}\varepsilon a^2 k \sin k\,(x-at) & \dots x-at \leq 0 \\ 0 & \dots x-at > 0 \end{cases}$$

$$\frac{p-p_0}{\varrho_0 a^2} = \begin{cases} -\varepsilon k \sin k\,(x-at) & \dots x-at \leq 0 \\ 0 & \dots x-at > 0 \end{cases}$$

2.3.4 Offenes Rohr - Verschiebung eines Fluidteilchens

Die Verschiebung eines Fluidteilchens wollen wir mit ζ bezeichnen. Die Änderung der Verschiebung in Folge der durchlaufenden Welle erhalten wir demnach aus

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\zeta = u\,\mathrm{d}t = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}t &= F'(x-at)\,\mathrm{d}t, \\ &= F'\left(x_0 + \zeta - at\right)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

wobei natürlich immer am Ort des Teilchens die Geschwindigkeitsstörung zu bestimmen ist. Da $u \ll a$ gilt folgt unmittelbar $\zeta \ll at$ und wir können die Geschwindigkeit wieder näherungsweise am Ort der Ruhelage des Fluidteilchens bestimmen,

$$\mathrm{d}\zeta = F'\left(x_0 - at\right)\,\mathrm{d}t.$$

die Integration liefert nun

$$\zeta = \int_0^t F'\left(x_0 - a\tau\right)\,\mathrm{d}\tau$$

und wenn man die Laufzeit der Welle bis zum Aufpunkt berücksichtigt, erhält man

$$\zeta = \int_{t_0=\frac{x_0}{a}}^{t} F'\left(x_0 - a\tau\right) \, \mathrm{d}\tau$$

angewandt auf unser Beispiel einer durchlaufenden Sinuswelle ergibt sich

$$\zeta = \frac{1}{a} \int_{0}^{x_0 - at} \varepsilon\omega \sin\left(k\xi\right) \, \mathrm{d}\xi$$

$$\zeta = -\varepsilon \cos k\xi|_0^{x_0-at} = \varepsilon\left(1 - \cos k(x_0 - at)\right)$$

2.4 Kugelwellen

Berechne - im Rahmen der linearen Theorie - die Ausbreitung einer Kugelwelle (Druckstörung), die sich $x = x_0 \neq 0$ nach außen ausbreitet und durch eine Quelle der Form

$$\begin{aligned} 0 \le t \le t_0: &\qquad 4\pi x_0^2 \Phi_x\left(x_0, t\right) = 16\left(c_0 t_0\right)^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^2 \\ t \le 0, t \ge t_0: &\qquad \Phi_x\left(x_0, t\right) = 0 \end{aligned}$$

hervorgerufen wird

2.4.1 Wellengleichung in Kugelkoordinaten

In kartesischen Koordinaten lautet die Wellengleichung

$$\Phi_{tt} - a^2 \Delta\Phi = 0.$$

Kartesische Koordinaten sind allerdings für die Beschreibung von kugelsymmetrischen Problemen ungeeignet, man wechselt also auf Kugelkoordinaten,

$$x = r\cos\phi\sin\theta \qquad y = r\sin\phi\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$$

und schreibt die Potentialfunktion Φ nun in Kugelkoordinaten $\Phi = \Phi(r, \phi, \theta, t)$ an, so muss auch die Differentialgleichung auf diese Koordinaten transformiert werden. Wir erhalten

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a^2 \underbrace{\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]}_{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\Phi} = 0.$$

Da r unter die Differentiation nach der Zeit gezogen werden kann, kann man die Wellengleichung umschreiben

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} r\Phi - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} r\Phi = 0.$$

Diese Gleichung hat für $r\Phi$ aber formal die gleiche Struktur wie die Wellengleichung in kartesischen Koordinaten für Φ. Es kann also analog zur kartesischen Gleichung die d'Alembert'sche Lösung für $r\Phi$ angegeben werden,

$$\begin{aligned} r\Phi &= F(r-at) + G(r+at) \\ \rightarrow \quad \Phi &= \frac{1}{r}F(r-at) + \frac{1}{r}G(r+at)\,. \end{aligned}$$

Analog gilt die selbe Überlegung für die Wellengleichung der Druck- bzw. Dichtestörung S.

$$\rightarrow \quad S = \frac{1}{r}F(r-at) + \frac{1}{r}G(r+at)\,.$$

Diese Lösung wird auch als d'Alembert'sche Lösung für kugelkoordinaten bezeichnet. Dabei beschreibt der Term $F(r-at)$ auslaufende Wellen, der Term $G(r+at)$ einlaufende Wellen. Im Fall von einfachen Wellen gilt bei auslaufenden Wellen $G \equiv 0$ bzw. einlaufenden Wellen $F \equiv 0$.

2.4.2 Wellenausbreitung

Man setzt also eine auslaufende Welle $\Phi = \frac{1}{x}F(\eta)$ mit $\eta = c_0t - x - x_0$ an. Aus der Rand- bzw. Anfangsbedingung erhält man eine Differentialgleichung für $F(\eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}F(\eta)\bigg|_{x=x_0} &= \Phi_x(x_0,t) \\ -\frac{1}{x_0^2}F(\eta) + \frac{1}{x_0}F'(\eta)(-1) &= \Phi_x(x_0,t) \\ F'(\eta) + \frac{1}{x_0}F(\eta) + x_0\Phi_x(x_0,\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Deren Lösung findet man mit

$$F(\eta) = -x_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}} \int_0^\eta \Phi_x(x_0,\sigma)\,\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{x_0}}\;\mathrm{d}\sigma.$$

Diese Lösung gilt allerdings nur für $0 \le \eta \le c_0t_0$. Für $c_0t_0 \le \eta$ ist die obere Grenze des Integrals durch $\sigma = c_0t_0$ zu ersetzen. Mit $\frac{c_0t_0}{x_0} = a$ erhalten wir für $0 \le \eta \le c_0t_0 - x + x_0$ die endgültige Lösung

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= \frac{1}{x}F(\eta) = -\frac{x_0}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}} \int_0^\eta \Phi_x(x_0,\sigma)\,\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{x_0}}\;\mathrm{d}\sigma \\ \Phi(x,t) &= -\frac{x_0}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}} \int_0^\eta \mathrm{e}^{\frac{\sigma}{x_0}}\frac{4}{\pi}\left(\frac{c_0t_0}{x_0}\right)^2\left(\frac{t}{t_0}\right)^2\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2\;\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

$$= -\frac{x_0}{x}\frac{4a^2}{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\int\limits_0^{\eta}\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{x_0}}\left(\frac{c_0t-x+x_0}{c_0t_0}\right)^2\left(1-\frac{c_0t-x+x_0}{c_0t_0}\right)^2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= -\frac{x_0}{x}\frac{4a^2}{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\int\limits_0^{\eta}\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{x_0}}\left(\frac{\sigma}{c_0t_0}\right)^2\left(1-\frac{\sigma}{c_0t_0}\right)^2\,\mathrm{d}\sigma$$

mit $c_0t_0 = ax_0$ und der Substitution $z = \frac{\sigma}{x_0}$ folgt

$$\Phi\left(x,t\right) = -\frac{x_0^2}{x}\frac{4a^2}{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\int\mathrm{e}^z\left(\frac{z}{a}\right)^2\left(1-\frac{z}{a}\right)^2\,\mathrm{d}z = -\frac{x_0^2}{x}\frac{4}{a^2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\int\mathrm{e}^z z^2\left(a-z\right)^2\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{x_0^2}{x}\frac{4}{a^2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\int\mathrm{e}^z\left(a^2z^2-2az^3+z^4\right)\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{x_0^2}{x}\frac{4}{a^2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\left\{z^4\,\mathrm{e}^z - 2az^3\,\mathrm{e}^z + \int\mathrm{e}^z\left(a^2z^2+6az^2-4z^3\right)\,\mathrm{d}z\right\}$$

$$= -\frac{x_0^2}{x}\frac{4}{a^2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\left\{z^4\,\mathrm{e}^z - 2az^3\,\mathrm{e}^z - 4z^3\,\mathrm{e}^z + \int\mathrm{e}^z\left(a^2z^2+6az^2+12z^2\right)\,\mathrm{d}z\right\}$$

$$= -\frac{x_0^2}{x}\frac{4}{a^2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\left\{\mathrm{e}^z\left[z^4-2(a+2)z^3\right] + \left(a^2+6a+12\right)\int z^2\,\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z\right\}$$

$$= -\frac{x_0^2}{x}\frac{4}{a^2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\left\{\mathrm{e}^z\left[z^4-2(a+2)z^3+\left(a^2+6a+12\right)\left(z^2-2z+2\right)\right]\right\}\Big|_0^{\frac{\eta}{x_0}}$$

$$\Phi\left(x,t\right) = -\frac{4}{a^2\pi}\frac{x_0^2}{x}\left\{\left(\frac{\eta}{x_0}\right)^4 - 2(2+a)\left(\frac{\eta}{x_0}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \left(a^2+6a+12\right)\left[\left(\frac{\eta}{x_0}\right)^2 - 2\frac{\eta}{x_0} + 2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\right)\right]\right\}$$

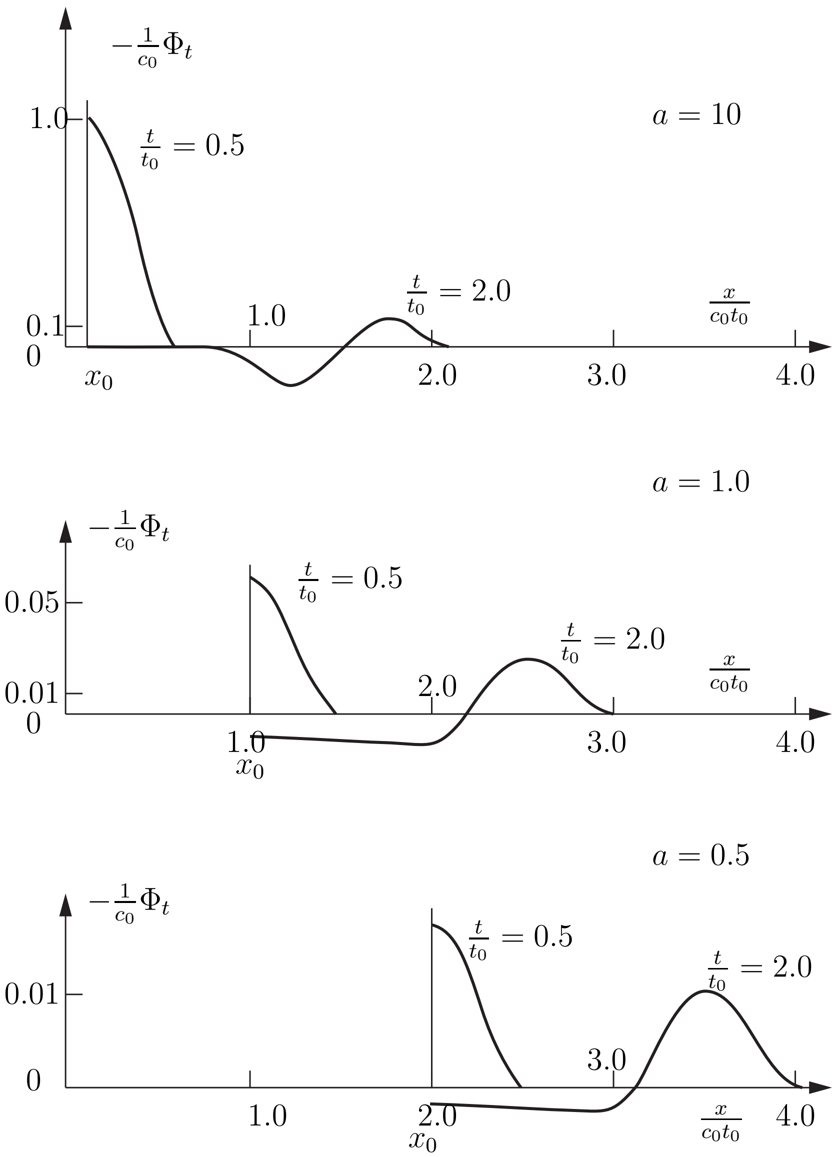
Für die Druckstörung S gilt ja $S = -c^2\Phi_t$, somit folgt die der Druckstörung proportionale Größe $-\frac{1}{c_0}\Phi_t$ für $\eta \leq c_0t_0$ mit

$$c_0S = -\frac{1}{c_0}\Phi_t\left(x,t\right) = \frac{8}{a^2\pi}\frac{x_0}{x}\left\{2\left(\frac{\eta}{x_0}\right)^3 - 3(2+a)\left(\frac{\eta}{x_0}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(a^2+6a+12\right)\left[\frac{\eta}{x_0} - 2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\right)\right]\right\}.$$

Für den Fall $c_0t_0 \leq \eta$ erhalten wir

$$c_0S = -\frac{1}{c_0}\Phi_t\left(x,t\right) = \frac{8}{a^2\pi}\frac{x_0}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{x_0}}\left[-\left(a^2-6a+12\right)\mathrm{e}^a + a^2+6a+12\right].$$

Die Lösung ist in nachstehender Abbildung dargestellt. Es zeigt sich, daß die Druckwelle für $a \gg 1$ mit jener der Kugelwelle, für $a = 0.5$ aber mit der ebenen Welle gut übereinstimmt. Allerdings ist stets auch ein nachlauf da, der sich bis $x = x_0$ erstreckt. Diese unterschiedlichen Resultate für die beiden Extremfälle ist auch nicht sonderlich verwunderlich, schließlich kann man den Fall $a \gg 1$ mit einer gut angenäherten Punktquelle identifizieren, während $a \ll 1$ bzw. bereits $a = 0.5$ einer großflächig ausgedehnten Schallquelle entspricht.



Ausbreitung einer Kugelwelle für verschiedene Parameter a.

2.5 Kugelwellen periodisch.

Die Meeresbiologen setzen für die Untersuchung der Walgesänge Schallquellen mit kugelsymmetrischer Abstrahlcharakeristik ein. Man berechne die Geschwindigkeits- und Druckstörungen, die im Halbraum über der Schiffswand ausgehend von dieser punktförmigen Schallquelle emittiert werden. Die Schallquelle am Punkt $x_0 \neq 0$ verursacht dabei auf einer Fläche mit Krümmungsradius $R \ll 1$ periodische Druckschwankungen der Form $p = p_0 + \varepsilon \sin \omega t$.

2.5.1 Halbraum - Druckstörung

Im Fall einfacher Wellen, wie wir sie in diesem Beispiel vorliegen haben, gilt immer entweder $F \equiv 0$ oder $G \equiv 0$. Da wir es hier mit auslaufenden Wellen zu tun haben, folgt als Lösung

$$S = \frac{1}{r} F(r - at)$$

gegeben. Allerdings müssen wir auch die Randbedingung berücksichtigen, die in unserem Fall durch den kugelförmigen Schallgeber vorgeschrieben ist. Durch die Annahme von $R \ll 1$ kann die Randbedinung näherungsweise auch am Ort des Krümmungsmittelpunkts angenommen werden und wir erhalten die vereinfachte Randbedinung

$$S\left(\vec{r} = \vec{r}_0, t\right) = \frac{\varepsilon}{\varrho_0 a^2} \cos \omega t.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der d'Alembert'schen Lösung, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
S\left(\vec{r} = \vec{r}_0, t\right) &= \frac{1}{R} F\left(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at\right) = \frac{\varepsilon}{\varrho_0 a^2} \cos \omega t \\
\rightarrow \quad F\left(-at\right) &= \frac{\varepsilon R}{\varrho_0 a^2} \cos \omega t \\
F\left(-at\right) &= \frac{\varepsilon R}{\varrho_0 a^2} \cos -k(-at) \\
\Rightarrow \quad F\left(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at\right) &= \frac{\varepsilon R}{\varrho_0 a^2} \cos -k(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Druck- bzw. Dichtestörungen

$$\Rightarrow \quad S\left(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at\right) = \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{\varepsilon}{\varrho_0 a^2} \cos k(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at).$$

2.5.2 Geschwindigkeitsstörung

Diese erhalten wir durch Einsetzen der Lösung der Druckstörung in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

in Kugelkoordinaten angeschrieben und die Druckstörung eingesetzt liefert uns

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(|\vec{r} - \vec{r}_0| \, \Phi) &= -\frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{\omega \varepsilon}{\varrho_0 a^2} \sin k(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at) \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(|\vec{r} - \vec{r}_0| \, \Phi) &= -R \frac{\omega \varepsilon}{\varrho_0 a^2} \sin k(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at) \\
\frac{\partial}{\partial r}(|\vec{r} - \vec{r}_0| \, \Phi) &= -R \frac{\omega \varepsilon}{\varrho_0 a^2} \int \sin k(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at) \, \mathrm{d}r \\
\frac{\partial}{\partial r}(|\vec{r} - \vec{r}_0| \, \Phi) &= R \frac{\omega \varepsilon}{\varrho_0 a^2 k} \cos k(|\vec{r} - \vec{r}_0| - at)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{r}-\vec{r}_0|\,\Phi &= R\frac{\omega\varepsilon}{\varrho_0 a^2 k}\int \cos k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at)\,\mathrm{d}r \\
\Phi &= \frac{R}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\frac{\omega\varepsilon}{\varrho_0 a^2 k^2}\sin k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at) \\
\Phi &= \frac{R}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\frac{\varepsilon}{\varrho_0 \omega}\sin k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at)
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsstörung ergibt sich aus der Differentiation,

$$\begin{aligned}
u = \frac{\partial\Phi}{\partial r} &= -\frac{R}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\varepsilon}{\varrho_0\omega}\sin k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at) + \frac{R}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\frac{\varepsilon k}{\varrho_0\omega}\cos k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at) \\
u &= \frac{R}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\frac{\varepsilon}{\varrho_0\omega}\left(k\cos k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\sin k(|\vec{r}-\vec{r}_0|-at)\right).
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Strömungen mit Wärmezufuhr

3.1 Gleichdruckverbrennung

Luft strömt aus einem Behälter mit dem Druck von $p_0 = 1\ bar$ und der Temperatur $T_0 = 15\ °C$. Die Luft wird isentrop beschleunigt zu einer Geschwindigkeit von $v = 100\ {}^m\!/_s$. Danach wird ihre absolute Temperatur mittels Gleichdruckverbrennung verdoppelt. Nach der Verbrennung wird die Luft wieder isentrop komprimiert zum Ruhezustand. Für Luft gilt $\kappa = 1.4$, $c_p = 1005\ J/kg/K$.

1. Wieviel Wärme muss zugeführt werden?
2. Wie groß ist die Differenz zwischen den Ruhetemperaturen $T_0, \hat{T}_0$ vor und nach der Verbrennung?
3. Wie verhalten sich die Ruhedrücke $p_0, \hat{p}_0$ zueinander?

3.1.1 Notwendige zugeführte Wärmemenge.

Die Ruheschallgeschwindigkeit und kritische Schallgeschwindigkeit folgt aus

$$c_0 = \sqrt{(\kappa-1)c_pT_0} = 340.35\ {}^m\!/_s$$
$$c = \sqrt{c_0^2 - \frac{\kappa-1}{2}v^2} = 337.40\ {}^m\!/_s$$

somit erhalten wir die Machzahl mit

$$M = \frac{v}{c} = 0.296$$

aus der bekannten Beziehung $\frac{T}{T_0} = \frac{c^2}{c_0^2}$ erhalten wir die Temperatur des strömenden Mediums,

$$T = \frac{c^2}{c_0^2}T_0 = 283.17\ K,$$

welche in Folge der Gleichdruckverbrennung verdoppelt werden soll. Unter Zuhilfenahme der Formel für die Gleichdruckverbrennung aus der Vorlesung erhalten wir die zuzuführende Wärmemenge,

$$q_{12} = c_p \left(\hat{T} - T\right) = c_p T = 1005 * 283.17 = 284.59 \; {}^{kJ}/_{kg}$$

3.1.2 Differenz der Ruhetemperaturen

Die beschleunigte Luft wurde um $\Delta T = 283.17\ K$ erwärmt, während ihre Geschwindigkeit konstant geblieben ist. Nun wird sie wieder isentrop komprimiert. Da die formel für gie Gleichdruckverbrennung nicht nur für Temperatur am Ort der Verbrennung gilt, sondern auch für die Ruhetemperaturen vor und nach der Verbrennung, erhalten wir die Temperaturdifferenz direkt mit

$$\Delta T = \hat{T}_0 - T_0 = \hat{T} - T = T = 283.17$$

3.1.3 Ruhedruckverlust

Das Verhältnis der Ruhedrücke ergibt sich lt. z.B. VO Skriptum „Grundlagen der Strömungslehre" bzw. *Oswatitsch*, „Gasdynamik" mit

$$\begin{aligned}\ln \frac{\hat{p}_0}{p_0} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \frac{\hat{T}_0}{T_0} - \frac{\hat{s} - s}{c_p - c_v} \\ &= \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left[\ln\left(1 + \frac{q}{c_p T_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{q}{c_p T}\right)\right].\end{aligned}$$

für unser vorliegendes Beispiel erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln \frac{\hat{p}_0}{p_0} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left[\ln\left(1 + \frac{c_p T}{c_p T_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{c_p T}{c_p T}\right)\right] \\ \ln \frac{\hat{p}_0}{p_0} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left[\ln\left(1 + \frac{283.17}{288.15}\right) - \ln 2\right] \\ &= -3.038 \cdot 10^-2 \\ \rightarrow \qquad \frac{\hat{p}_0}{p_0} &= 0.970\end{aligned}$$