C Koeffizienten der A-Orthogonalisierung für das CG-Verfahren

Zunächst ist es nützlich den Fehler $\vec{e}$ zu definieren. Mit $\vec{e}^{(n)} = \vec{x}^* - \vec{x}^{(n)}$, wobei $\vec{x}^*$ die exakte Lösung des linearen Problems ist, gilt

$$\mathsf{A} \cdot \vec{e}^{(n)} = \underbrace{\mathsf{A} \cdot \vec{x}^*}_{\vec{b}} - \mathsf{A} \cdot \vec{x}^{(n)} = \vec{b} - \mathsf{A} \cdot \vec{x}^{(n)} = \vec{\rho}^{(n)}. \tag{C.1}$$

Wenn man nun zu Beginn der Rechnung den Fehler durch die konjugierten Richtungen darstellt

$$\vec{e}^{(0)} = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j \vec{p}^{(j)}, \tag{C.2}$$

dann folgt

$$\vec{p}^{(n)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{e}^{(0)} = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j \vec{p}^{(n)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(j)} = \delta_n \vec{p}^{(n)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(n)} \tag{C.3}$$

Damit ergibt sich, daß der Fehler nur in dem Komplement des Krylov-Raumes $\mathcal{V}_n = \operatorname{span}\{\vec{p}^{(0)}, \ldots, \vec{p}^{(n-1)}\}$ lebt

$$\vec{e}^{(n)} = \ldots = \sum_{j=n}^{N-1} \delta_j \vec{p}^{(j)}. \tag{C.4}$$

Hieraus folgt wiederum, daß das Residuum $\vec{\rho}^{(n)}$ senkrecht ist zu $\mathcal{V}_n$, denn für $i < n$ gilt

$$\vec{p}^{(i)} \cdot \vec{\rho}^{(n)} = -\vec{p}^{(i)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{e}^{(n)} = -\sum_{j=n}^{N-1} \delta_j \underbrace{\vec{p}^{(i)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(j)}}_{=0,\ \text{für}\ i<j} = 0. \tag{C.5}$$

Damit können wir zeigen, daß der Zähler von (5.82), $\vec{p}^{(l)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{\rho}^{(n+1)}$ für $l \leq n$ verschwindet. Dazu beachten wir

$$\vec{\rho}^{(l+1)} = \vec{\rho}^{(l)} - \alpha^{(l)} \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(l)} \tag{C.6}$$

Damit gilt

$$\vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \vec{\rho}^{(l+1)} = \vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \left(\vec{\rho}^{(l)} - \alpha^{(l)} \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(l)}\right) = \vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \vec{\rho}^{(l)} - \alpha^{(l)} \vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(l)}. \tag{C.7}$$

Für den Zähler von (5.82) folgt also

$$\vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(l)} = \frac{\vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \vec{\rho}^{(l)} - \vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \vec{\rho}^{(l+1)}}{\alpha^{(l)}} \tag{C.8}$$

Für $l \leq n$ verschwindet der erste Summand im Zähler, weil $\vec{\rho}^{(n)} \in \mathcal{V}_n$ und $\vec{\rho}^{(n)} \perp \mathcal{V}_n$. Der zweite Summand, und damit die gesamte rechte Seite verschwindet für $l < n$. Für $l = n$ verbleibt lediglich

$$\vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \mathsf{A} \cdot \vec{p}^{(n)} = -\frac{\vec{\rho}^{(n+1)} \cdot \vec{\rho}^{(n+1)}}{\alpha^{(n)}}. \tag{C.9}$$

Dies sollte derselbe Term wie in (5.83) sein.