B Bemerkungen zur Gauß-Quadratur

Eine streng mathematische Ableitung der Gauß-Quadratur kann man in Freund et al. (2007) finden. Hier soll nur kurz gezeigt werden, daß die Gauß-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} w(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \tag{B.1}$$

für jedes Polynom m-ten Grades $f(x) = p(x)$ mit $m \le 2n-1$ exakt ist.

Um dies zu zeigen, setzen wir voraus, daß die Gewichte a_i definiert sind durch das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(x_i) a_i = \begin{cases} \langle p_0 | p_0 \rangle\,, & \text{falls} \quad k = 0, \\ 0, & \text{falls} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{B.2}$$

wobei $p_k(x)$ ein orthogonales Polynom vom Grade k ist und

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} w(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \tag{B.3}$$

das zugehörige Skalarprodukt mit Gewichtsfunktion $w(x)$. Wir betrachten nun die allgemeine Darstellung eines beliebigen Polynoms der Ordnung $m \le 2n-1$ in der Form

$$p(x) = p_n(x) q(x) + r(x), \tag{B.4}$$

wobei $p_n(x)$ ein orthogonales Polynom vom Grade n ist und

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x) \qquad \text{und} \quad r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(x). \tag{B.5}$$

Wenn wir dieses allgemeine Polynom $p(x)$ von Grade $m \le 2n-1$ mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ integrieren, erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} w(x) p(x)\,\mathrm{d}x &\overset{p_0=1}{=} \langle p_n(x) q(x) + r(x) | p_0 \rangle = \underbrace{\langle p_n(x) | q(x) \rangle}_{=0} + \langle r(x) | p_0 \rangle \\ &= \langle r(x) | p_0 \rangle = \beta_0 \langle p_0 | p_0 \rangle\,. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Der Term $\langle p_n(x)|q(x)\rangle = 0$ verschwindet, weil $q(x)$ vom Grade $n-1$ ist und damit orthogonal zu dem orthogonalen Polynom n-ter Ordnung $p_n(x)$. Andererseits gilt wegen (B.2)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i p(x_i) &\overset{p_n(x_i)=0}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i r(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_k(x)\right) \\ &= \beta_0 \left\langle p_0 | p_0 \right\rangle . \end{aligned} \tag{B.7}$$

Mit (B.6) und (B.7) ist

$$\int_{-1}^{1} w(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} a_i p(x_i), \tag{B.8}$$

für jedes Polynom $p(x)$, das höchstens vom Grade $2n-1$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.