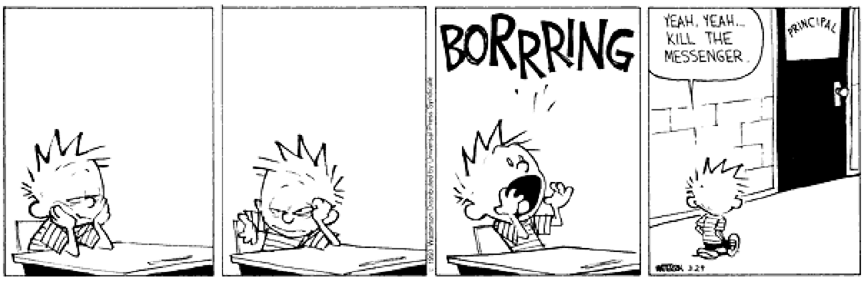


Übungsbeispiele zur VU Grundlagen der Strömungslehre 322.034

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung
E322

Christian Hauser

2. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

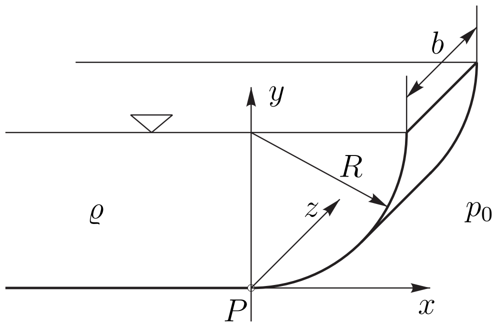
Kapitel 1

Hydrostatik

1.1 Flüssigkeitsdruck auf zylindrisch gekrümmte Wand.

Eine gekrümmte Wand trennt, wie in der Skizze gezeigt, eine Flüssigkeit der Dichte ρ von der umgebenden Luft (Druck p_0).

Berechnen Sie den Betrag und den Angriffspunkt der von den Fluiden auf die Wand wirkenden Kraft $\vec{F}_{Fl}$. Der Kraftangriffspunkt ist jener (fiktive) Punkt in dem eine gesuchte Kraft bzw. Gegenkraft momentenfrei ansetzt, um die Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte und Momente zu erfüllen.



zur Kontrolle:

$$\vec{F}_K = \varrho g b \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = -\vec{F}_{Fl}$$

$$\varphi_D = 57.5°$$

1.2 Hydraulische Presse.

Ein hydraulischer Wagenheber besteht im Prinzip aus zwei miteinander verbundenen, flüssigkeitsgefüllten Röhren unterschiedlicher Querschnittsfläche. Nach oben ist die Flüssigkeit von je einem, dicht mit der Wand des jeweiligen Rohres abschließenden Kolben begrenzt.

Man berechne für die gegebenen Kolbenflächen A_1, A_2 die Kraft F_1 auf Kolben 1, die nötig ist, um einer Kraft F_2 auf Kolben 2 die Waage zu halten.

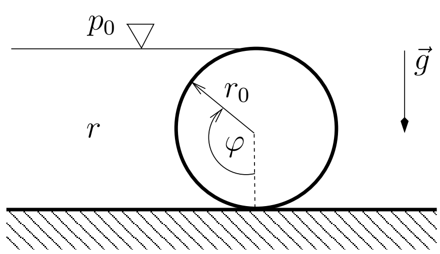
zur Kontrolle:

$$F_1 = \frac{F_2 A_1}{A_2} + \varrho g(h_2 - h_1)A_1$$

1.3 Druckkraft auf Kreiszylinder.

Für das skizzierte kreiszylindrische Wehr vom Radius r_0 und der Breite b (senkrecht zur Zeichenebene) ist die resultierende Druckkraft nach Betrag und Richtung gesucht. Bestimmen Sie die Kraft durch Integration über die Druckverteilung.

Durch welchen Punkt führt die Wirkungslinie der resultierenden Kraft?



zur Kontrolle:

$$\vec{F} = \varrho g b r_0^2 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Kreismittelpunkt.

Kapitel 2

Bernoulli-Gleichung

2.1 Fallrohr.

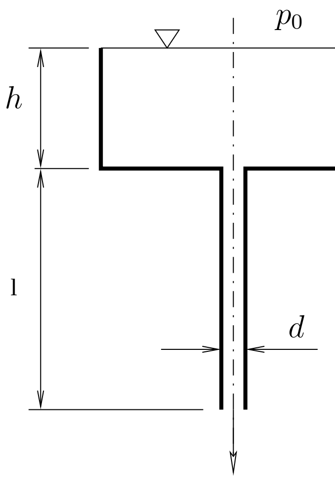
In einem Behälter von sehr großem Querschnitt befindet sich bis zur Höhe h Wasser der Dichte ϱ. Zur Vermeidung von Dampfbildung (Dampfdruck p_D) am Rohreinlauf muß die Rohrlänge l begrenzt bleiben.

Wie groß kann die Länge l maximal ausgeführt werden, wenn

1. der Rohrdurchmesser d konstant ist?

2. am Rohrende eine Düse den Rohrdurchmesser von d auf $d/2$ verringert?

Berechnen Sie das Ergebnis zunächst allgemein und sodann für die Zahlenwerte $d = 100$ mm, $\varrho = 1000$ kg/m^3, $h = 5$ m und Umgebungsdruck $p_0 = 1$ bar.



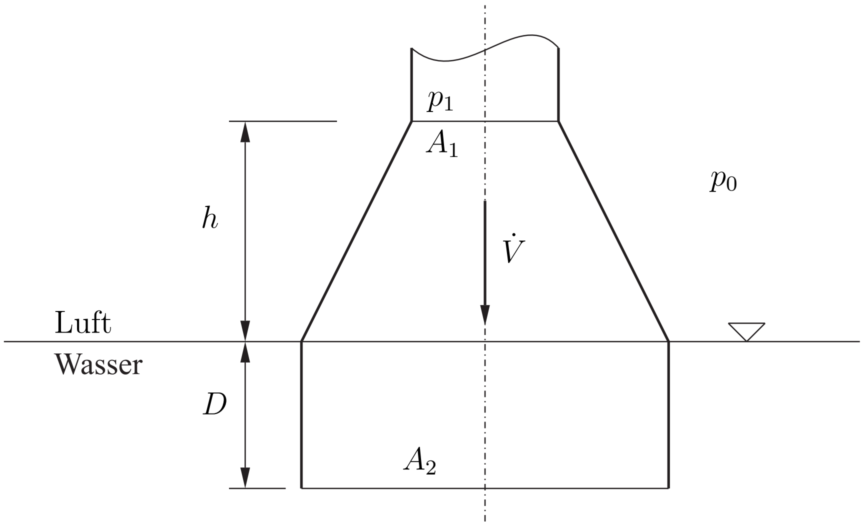
zur Kontrolle:

1.	$l \leq 10,2$ m	$u_1 = 17,3$ m/s	$u_2 = 17,3$ m/s
2.	$l \leq 238$ m	$u_1 = 17,3$ m/s	$u_2 = 69$ m/s

2.2 Austrittsdiffusor.

Der Austrittsdiffusor einer Turbine erweitere sich von der Eintrittsfläche A_1 auf die Austrittsfläche A_2. Der Diffusoreintritt liege um die Höhe h über dem Wasserspiegel.

Für die Werte $h = 2$ m, $A_1 = 5$ m^2, $A_2 = 25$ m^2, $\rho = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3, $p_0 = 1$ bar bestimme man den maximalen Volumenstrom $\dot{V}$, sodaß der Druck p_1 im Diffusoreintritt den Dampfdruck $p_D \approx 0$ bar des Wassers gerade nicht unterschreitet.



zur Kontrolle:

$$\dot{V} \leq 64.7 \text{ m}^3/\text{s}$$

Kapitel 3

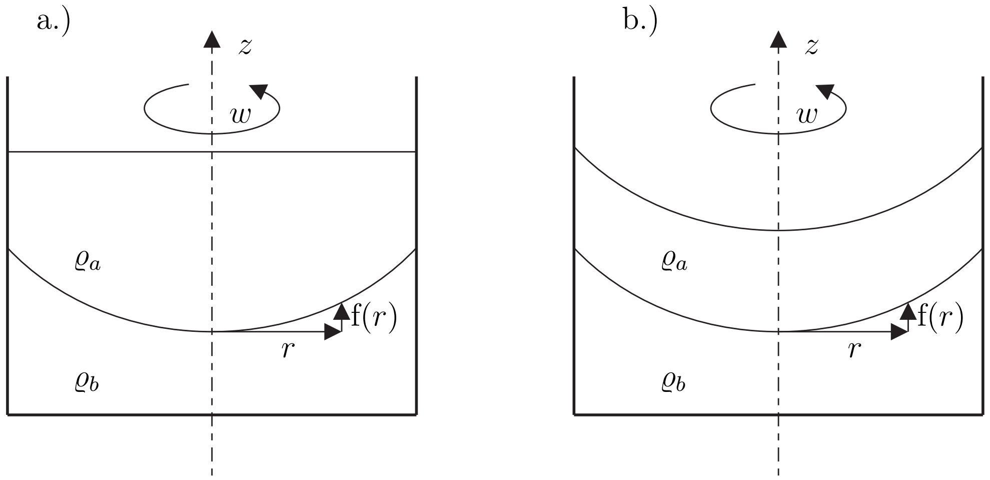
Rotierende Flüssigkeit

3.1 Rotierende Flüssigkeit.

Ein kreiszylindrischer Behälter ist mit zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten der Dichten ϱ_a und ϱ_b gefüllt, wobei $\varrho_a < \varrho_b$ gilt. Welcher Gleichung $z = \mathrm{f}(r)$ genügt die Trennlinie zwischen den beiden Flüssigkeiten, wenn

1. die untere Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, während die obere Flüssigkeit ruht?

2. beide Flüssigkeiten mit der Geschwindigkeit ω rotieren?



zur Kontrolle:

$$1. \qquad \mathrm{f}(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}\frac{\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a}$$

$$2. \qquad \mathrm{f}(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

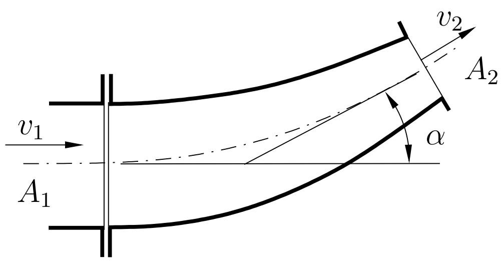
Kapitel 4

Impulssatz

4.1 Rohrkrümmer.

Gegeben ist ein Rohrkrümmer (Skizze) mit Eintrittsquerschnitt A_1 und Austrittsquerschnitt A_2. Die Geschwindigkeit v_1 im Eintrittsquerschnitt sowie der Außendruck p_2 seien ebenfalls bekannt. Der Krümmer lenkt die Strömung um einen Winkel α um.

Berechnen Sie die Haltekraft $\vec{H}$, die in der Flanschverbindung übertragen wird, sowie die Kraft $\vec{R}$, die von der Flüssigkeit auf die Innenwand des Krümmers ausgeübt wird.

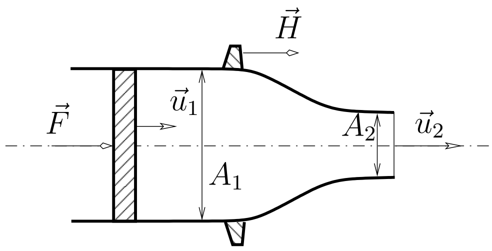


zur Kontrolle:

$$\vec{H} = \varrho v_1^2 A_1 \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right] - (p_1 - p_2) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{R} = -\varrho v_1^2 A_1 \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right] + p_1 A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - p_2 A_2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

4.2 Düse.

Ein mit Flüssigkeit der Dichte ϱ gefülltes Rohr mit der Querschnittsfläche A_1 mündet in eine Düse mit der Querschnittsfläche A_2 und wird dadurch geleert, daß ein Kolben mit der konstanten Geschwindigkeit u_1 durch das Rohr geschoben wird.
Berechnen Sie die Kraft F, mit der man den Kolben verschieben muß, sowie die Haltekraft H.



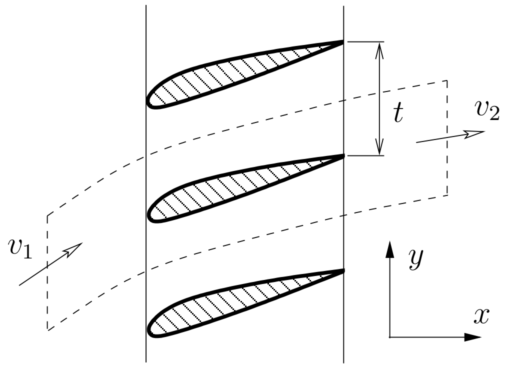
zur Kontrolle:

$$\vec{F} = \frac{\rho}{2} u_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{H} = -\vec{F} + \rho u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Schaufelgitter.

Eine Parallelströmung strömt ein ebenes Schaufelgitter unter dem Winkel $\beta_1 = \pi/6$ an, die Abströmung erfolgt unter dem Winkel $\beta_2 = 0$. Die Anströmgeschwindigkeit betrage $v_1 = 5$ m/s, der Eintrittsquerschnitt eines Schaufelkanals sei $A_e = 0,2$ m^2.

Man bestimme die auf eine Einzelschaufel wirkenden Kräfte unter der Annahme, daß es sich beim strömenden Medium um Wasser handelt ($\varrho = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3) und die Reibungskräfte vernachlässigt werden können.



zur Kontrolle:

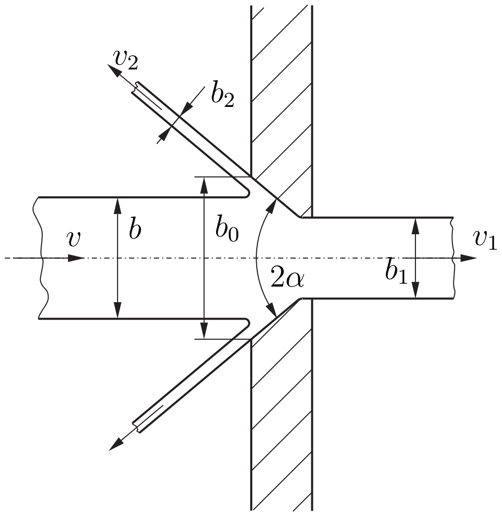
$$\vec{F} = \varrho v_1^2 \sin\beta_1 A_e \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\beta_1 \\ \cos\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -625 \\ 2165 \end{pmatrix} \text{ N}$$

4.4 Düse.

Ein ebener Strahl der Breite b strömt mit der Geschwindigkeit v auf eine konvergente Düse Schlitzdüse (Eintrittsbreite $b_0 > b$, Austrittsbreite $b_1 < b$). Der Öffnungswinkel der Düse beim Eintrittsquerschnitt ist 2α. Der Umgebungsdruck vor und hinter der Düse ist mit p_0 gegeben, die Dichte sei ϱ.

Man berechne aus den gegebenen Größen unter Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien Strömung

1. die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 des durchtretenden und des reflektierten Strahls
2. den Breite b_2 eines reflektierten Strahls
3. sowie die Kraft $\vec{F}$ des Flüssigkeitsstrahls (bezogen auf die Tiefeneinheit) auf die Düse.



zur Kontrolle:

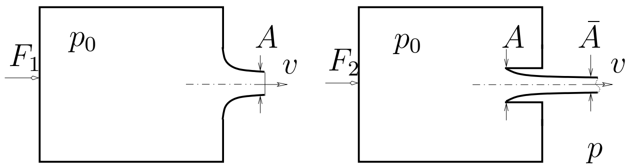
$$
\begin{aligned}
v_1 = v_2 &= v \\
b_2 &= \frac{b - b_1}{2} \\
\frac{\vec{F}}{t} &= -\varrho v^2 \,(b_1 - b)\,(1 + \cos\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.5 Ausströmvorgang.

Eine inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit ströme aus einem Gefäß mit konstantem Innendruck p_0 durch eine Öffnung der Fläche A in die umgebende Luft (Druck p).

Man berechne die Haltekraft F und die Endquerschnittsfläche $\bar{A}$ des Strahles für

1. eine abgerundete Ausflußöffnung (keine Strahlkontraktion, $A = \bar{A}$)
2. eine *Bordamündung*: Die Ausflußöffnung A ist durch ein angesetztes Rohr weit in das Innere des Behälters gezogen. Der austretende Freistrahl kontrahiert sich.



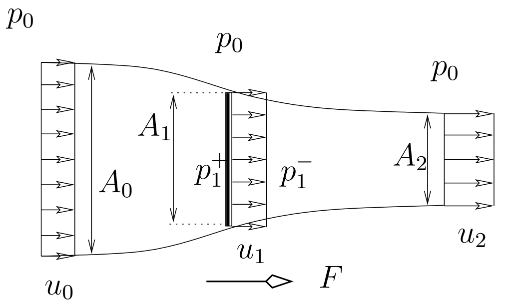
zur Kontrolle:

$$\vec{F}_1 = 2\,(p_0 - p)\,A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_2 = (p_0 - p)\,A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

4.6 Propeller.

Ein Propeller (Kreisfläche A_1) bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 durch ruhende Luft, auf die er die Schubkraft F ausübt. Die Skizze zeigt den für einen mit dem Propeller bewegten Beobachter stationären Strömungsvorgang. Die den Propellerkreis durchsetzende Luft strömt mit der Fluggeschwindigkeit u_0 in einem Strahl der Querschnittsfläche A_0 gegen den Propeller an und strömt in einiger Entfernung dahinter als Strahl der Querschnittsfläche A_2 mit der Geschwindigkeit $u_2 > u_1$ ab.

Ermitteln Sie eine Formel für die vom Propeller aufzubringende Leistung P und werten Sie sie für $u_0 = 40$ m/s, $A_1 = 3$ m^2, $\rho = 1,3$ kg/m^3 und $F = 2$ kN aus.



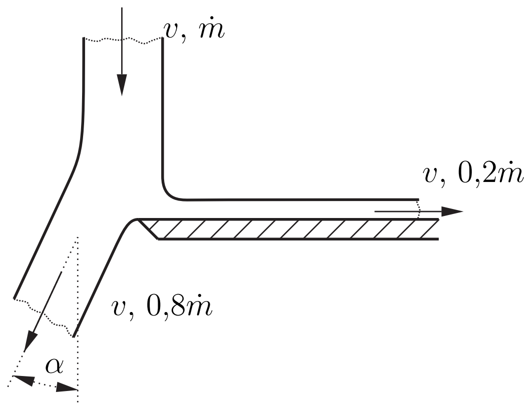
zur Kontrolle:

$$P = F\frac{u_0 + u_2}{2} \approx 91 \text{ kW}$$

4.7 Teilung eines Wasserstrahls.

Ein Wasserstrahl der Menge $\dot{m} = 500$ kg/s strömt mit der Geschwindigkeit $v = 5$ m/s gegen eine Schneide und wird dort abgelenkt, wobei $1/5$ der Wassermenge nach rechts abströmt. Die Reibung sei wie die Schwerkraft vernachlässigbar (z.B. horizontale Strömung).

Berechnen Sie den Winkel α, um den der größere Teilstrahl von der ursprünglichen Strahlrichtung abgelenkt wird, sowie die Haltekraft der Schneide.

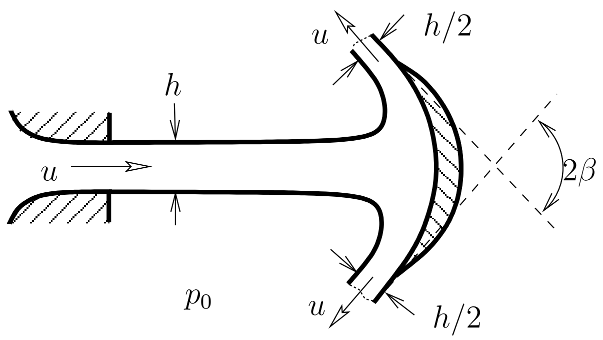


zur Kontrolle:

$$\alpha \approx 14.5^\circ$$
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 563\ \mathrm{N} \end{pmatrix}$$

4.8 Turbinenschaufel.

Ein Wasserstrahl der Breite h und der Tiefe b trifft mit der Geschwindigkeit u auf die Schaufel eines Turbinenrades, die den Strahl symmetrisch nach zwei Seiten um den Winkel $\pi - \beta$ umlenkt.



Man berechne:

1. Die Schaufelkraft $\vec{F}_S$ bei stillstehender Schaufel,
2. die Schaufelkraft $\vec{F}_S$, wenn sich die Schaufel mit der Geschwindigkeit u_0 bewegt,
3. die Leistung P und den Wirkungsgrad η.

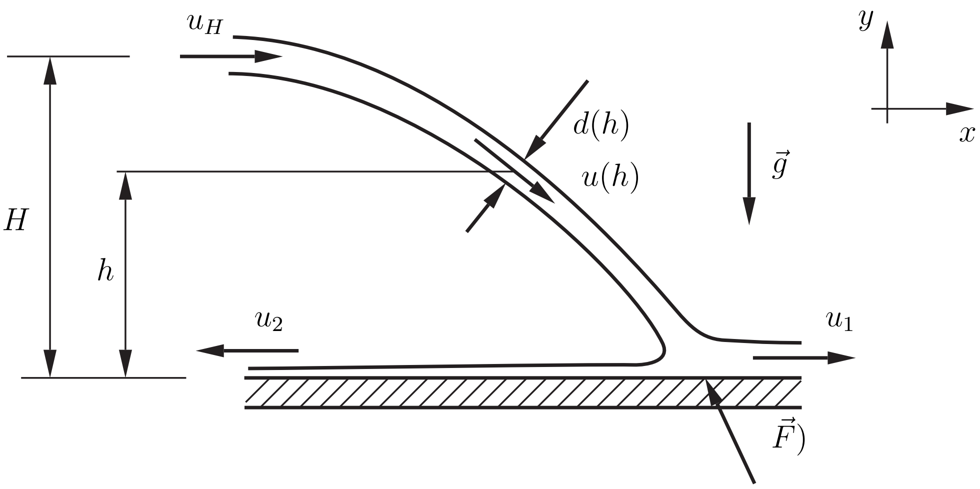
zur Kontrolle:

$$\vec{F}_S(u_s = 0) = \varrho u^2 h t \begin{pmatrix} 1 + \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_S(u_s = u_0) = \varrho\,(u-u_0)^2\,ht\begin{pmatrix}1+\cos\beta\\0\end{pmatrix}$$
$$P(u_s = 0) = 0$$
$$\eta(u_s = 0) = 0$$
$$P(u_s = u_0) = \varrho u_0\,(u-u_0)^2\,ht\,(1+\cos\beta)$$
$$\eta(u_s = u_0) = \frac{2u_0\,(u-u_0)^2\,(1+\cos\beta)}{u^3}$$

4.9 Haltekraft einer von einem Flüssigkeitsstrahl getroffenen ebenen Platte.

Ein ebener Flüssigkeitsstrahl der Dichte ρ tritt waagrecht mit der Geschwindigkeit u_H und der Dicke d_H aus einer Düse und trifft nach der Fallhöhe H auf eine ebene Platte.



Man berechne für *reibungsfreie* Strömung

1. den Auftreffwinkel des Strahls,
2. die Dicke $d(h)$ des Freistrahls,
3. sowie die Dicken der abgehenden Flüssigkeitsschichten.
4. die Kraft pro Tiefeneinheit b, mit der die Platte gehalten werden muß (die Gewichtskraft des Strahles ist zu vernachlässigen),

zur Kontrolle:

$$\alpha = \arctan\frac{-\sqrt{2gH}}{u_H}$$

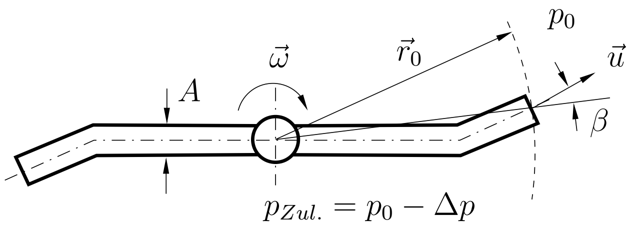
$$
\begin{aligned}
d(h) &= \frac{d_H u_H}{\sqrt{u_H^2 + 2g(H-h)}} \\
h_2 &= \frac{u_H d_H}{2}\left(\frac{\sqrt{u_H^2 + 2gH} - u_H}{u_H^2 + 2gH}\right) \\
h_1 &= \frac{u_H d_H}{2}\left(\frac{\sqrt{u_H^2 + 2gH} + u_H}{u_H^2 + 2gH}\right) \\
\frac{\vec{F}_K}{b} &= \varrho u_H \sqrt{2gH} d_H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Kapitel 5

Drehimpulssatz

5.1 Rasensprenger.

Ein zweiarmiger Rasensprenger mit vertikaler Achse muss bei stationärer Drehung ein Reibungsmoment $\vec{M}_r$ überwinden. Der Wasserdruck in der Zuleitung unmittelbar vor Eintritt in die beiden Arme beträgt $p_0 - \Delta p$ mit dem Atmosphärendruck p_0. Die Querschnittsfläche jedes Armes ist A und die Querschittsfläche der Zuleitung $A_1 = 2A$. Weiters sind auch r_0, β und ρ bekannt.



Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, mit welcher der Rasensprenger rotiert, sowie den Volumenstrom $\dot{V}$.

zur Kontrolle:

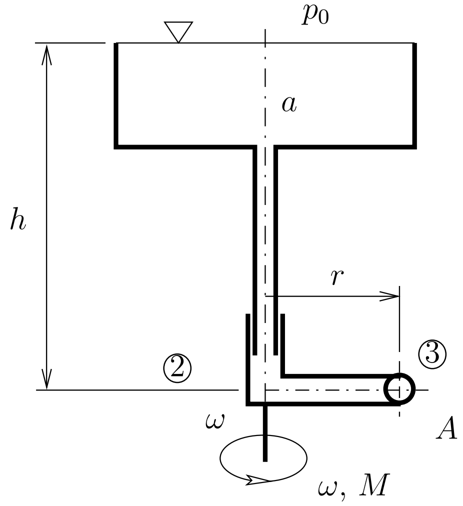
$$\dot{V} = \frac{Ar_0\omega}{\sin\beta} + \sqrt{\left(\frac{Ar_0\omega}{\sin\beta}\right)^2 + \frac{2AM_r}{\rho r_0 \sin\beta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho r_0^2}}$$

5.2 Segnersches Wasserrad.

Aus einem Behälter strömt Flüssigkeit durch ein vertikales Rohr einem an den Stellen ② und ③ abgewinkelten Rohr zu, das sich reibungsfrei um die Achse a dreht. An das drehbare Rohr ist eine Welle w angesetzt, durch die ein Drehmoment M an einen Verbraucher abgegeben wird. Das Rohr rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und habe die Querschnittsfläche A.

Man berechne das Moment M. Wie groß ist der Massenstrom $\dot{m}$?



zur Kontrolle:

$$M = \varrho\,(u - r\omega)^2\, rA$$
$$\dot{m} = \varrho A\sqrt{r^2\omega^2 + 2gh}.$$

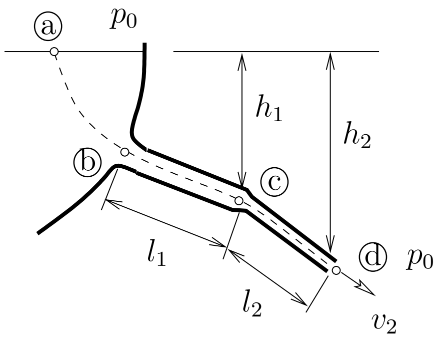
Kapitel 6

Instationäre Bernoulli-Gleichung

6.1 Druckleitung eines Stausees.

Aus einem Stausee führt eine Rohrleitung, die zunächst durch einen Schieber verschlossen ist. Der Schieber wird zur Zeit $t = 0$ plötzlich geöffnet.
Für die Werte $h_1 = 70$ m, $h_2 = 100$ m, $l_1 = 250$ m, $l_2 = 50$ m, $d_1 = 3,5$ m, $d_2 = 0,7$ m und $\rho = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3 berechne man

1. die in den beiden Teilleitungen 1 und 2 unmittelbar nach Öffnen des Schiebers herrschenden Beschleunigungen a_{01} und a_{02}.
2. den Überdruck $p_C - p_0$, der unmittelbar nach Öffnen des Schiebers im Punkt C herrscht.
3. die Ausströmgeschwindigkeit v_2 als Funktion der Zeit, $v_2 = v_2(t)$.



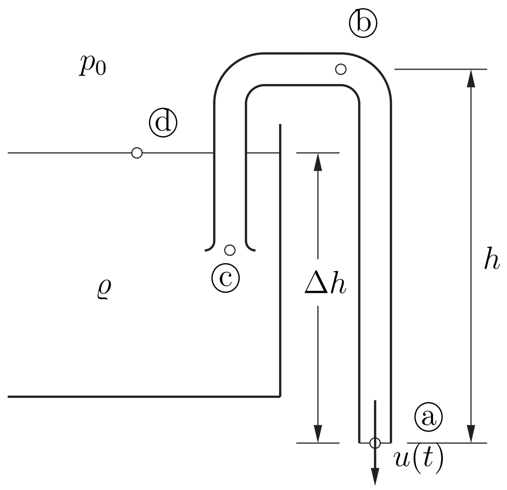
zur Kontrolle:

$$a_{01} = \frac{d_2^2}{d_1^2}\frac{gh_2}{L} \qquad a_{02} = \frac{gh_2}{L}$$

$$p_{c} - p_0 = \varrho\,(gh_1 - a_{01}l_1) \qquad \frac{u_2(t)}{\sqrt{2gh_2}} = \tanh(\frac{\sqrt{2gh_2}}{2L}t)$$

6.2 Heberleitung.

Eine Heberleitung der Länge l und konstanten Querschnitts taucht in einen großen Flüssigkeitsbehälter ein. Die Leitung ist zunächst am unteren Ende verschlossen und vollständig mit Flüssigkeit gefüllt. Die Ausflußöffnung liegt um Δh unter dem Flüssigkeitsspiegel im Behälter.



Bestimmen Sie

1. die Beschleunigung a_0 im Rohr zum Zeitpunkt $t = 0$, an dem die Heberleitung plötzlich geöffnet wird,
2. den Druck p_b, der unmittelbar nach Öffnen der Leitung bzw. für große Zeiten im Punkt ⓑ herrscht.
3. die Ausströmgeschwindigkeit $u(t)$ als Funktion der Zeit und die Geschwindigkeit u_∞, die sich für große Zeiten einstellt,

Skizzieren Sie den Druckverlauf für $t = 0$ und $t \to \infty$.

zur Kontrolle:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{g\Delta h}{l} \\
p_b(t=0) &= p_0 + \varrho g h \left(\frac{\Delta h}{l} - 1 \right) \\
p_b(t \to \infty) &= p_0 - \varrho g h \\
\frac{u(t)}{\sqrt{2g\Delta h}} &= \tanh(\frac{\sqrt{2g\Delta h}}{2l} t) \\
u(t \to \infty) &= \sqrt{2g\Delta h}
\end{aligned}
$$

Kapitel 7

Kompressible Strömung

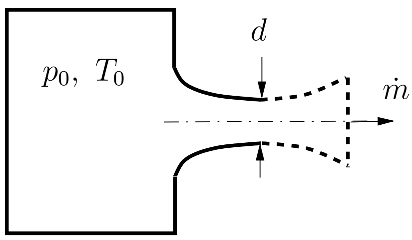
7.1 Ausströmen aus einem Kessel.

Aus einem Kessel (Ruhedruck $p_0 = 8$ bar, Ruhetemperatur $T_0 = 350$ K) strömt durch eine Öffnung Luft aus. Der Außendruck ist $p_a = 1$ bar, der minimale Durchmesser ist $d = 50$ mm. $c_p = 1005$ J/kg/K, $\kappa = 1,4$. Man berechne:

1. die Ausströmgeschwindigkeit u und den Massenstrom $\dot{m}$ für den Fall, daß der kleinste Querschnitt der Austrittsquerschnitt ist.

2. die Ausströmgeschwindigkeit u_e im Endquerschnitt, $\dot{m}$ und Austrittsquerschnitt A_e für den Fall, daß die Öffnung eine ideale Lavaldüse darstellt (Überschall, $p_e = p_a = 1$ bar).

3. die in den Punkten 1. und 2. gesuchten Größen für $p_0 = 1.5$ bar, wobei aber für die zweite Aufgabenstellung der in 2. berechnete Endquerschnitt der Lavaldüse zu verwenden ist (Lavaldüse mit Stoß).



zur Kontrolle:

1.	$u_e = 342.42$ m/s	$\dot{m} = 3.39$ kg/s	
2.	$u_e = 560.88$ m/s	$\dot{m} = 3.39$ kg/s	$d_e = 65.5$ mm
3.1	$u_e = 277.36$ m/s	$\dot{m} = 0.61$ kg/s	
3.2	$u_e = 183.18$ m/s	$\dot{m} = 0.635$ kg/s	

7.2 Pitotrohr.

In Unterschallströmungen läßt sich durch Messung der Druckdifferenz Δp zwischen Staupunktsdruck p_S und statischem Druck p_∞ die Strömmungsgeschwindigkeit bestimmen. Es sei $p_\infty = 1$ bar, die Temperatur des strömenden Mediums $T_\infty = 288$ K.

Man berechne die Strömungsgeschwindigkeit v

1. bei inkompressibler Strömung,

2. für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmen ($c_p = 1005$ J/kg K, $\kappa = 1,4$)

3. und bestimme die relative Abweichung der Ergebnisse für inkompressible von jenen für kompressible Strömung für die Druckdifferenzen $\Delta p_1 = 0.3$ Pa, $\Delta p_2 = 250$ Pa und $\Delta p_3 = 4000$ Pa.

zur Kontrolle:

$$u_i = \sqrt{2c_pT_\infty \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_\infty}}$$

$$u_k = \sqrt{2c_pT_\infty \left[\left(\frac{p_\infty}{p_\infty + \Delta p}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right]}$$

Δp	u_i	u_k	f
0.3 Pa	0.7044024823...	0.7044021049...	$-5.36e-7$
250 Pa	20.334348140...	20.325281231...	$-4.46e-4$
4000 Pa	81.337392560...	80.767343115	$-7.06e-3$

7.3 Lavaldüse.

Eine Lavaldüse habe einen minimalen Durchmesser $A_{min} = 5$ cm^2 und einen doppelt so großen Endquerschnitt, $A_e = 2A_{min}$. Ruhedruck und Ruhetemperatur vor der Düse sind durch $p_0 = 3$ bar und $T_0 = 300$ K gegeben, beim strömenden Medium handle es sich um ein ideales Gas mit $\kappa = 1,4$ und $c_p = 1005$ J/kg K. In der Düse stehe ein senkrechter Verdichtungsstoß am Querschnitt $A_s = 6,25$ cm^2.

Berechnen Sie mit Hilfe der Isentropentabelle den Druck p_e und die Machzahl M_e im Endquerschnitt.

zur Kontrolle:

$$p_e \approx 2.47 \text{ bar}$$
$$\mathrm{M}_e \approx 0.348$$

7.4 Lavaldüse.

Gegeben ist eine Lavaldüse mit minimalem Querschnitt $A_{min} = 10$ cm^2. Der Ruhezustand vor der Düse ist durch $p_0 = 4.9$ bar und $T_0 = 300$ K gegeben, der Umgebungsdruck am Ende der Düse ist $p_e = 1$ bar.

1. Bestimmen Sie den Endquerschnitt A_e und den Massenstrom $\dot{m}$ durch die Düse für den Fall, daß es sich um eine ideale Lavaldüse im Überschallbetrieb handelt.

2. Erhöht man den Umgebungsdruck am Düsenende auf den Wert $p'_e = 4$ bar, so bildet sich in der Düse ein senkrechter Verdichtungsstoß aus. Bestimmen Sie den Stoßquerschnitt A_s.

3. Welcher Umgebungsdruck p''_e ist nötig, damit der Massenstrom $\dot{m}_c = 0.7\dot{m}_{max}$ durch die Düse strömt?

zur Kontrolle:

$$\begin{aligned} A_e &= 13.34 \text{ cm}^2 \\ \dot{m} &= 1.144 \text{ kg/s} \\ A_S &= 10.6 \text{ cm}^2 \\ p''_e &= 4.55 \text{ bar} \end{aligned}$$

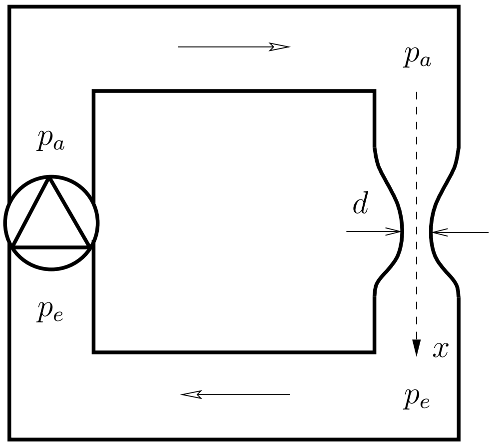
7.5 Lavaldüse.

Eine Lavaldüse, deren Querschnittsverlauf gegeben ist, wird in einem geschlossenen Kreislauf durch einen Kompressor betrieben. Das Druckverhältnis des Kompressors $\frac{p_a}{p_e}$ sei 2.

Berechnen Sie die Stoßlage, füllen Sie die unten stehende Tabelle aus und skizzieren Sie den Druckverlauf. Beachten Sie, daß nach dem Stoß $\frac{A^*}{A}$ wie auch $\frac{p}{p_0}$ nicht mehr sinnvoll sind und statt dessen besser eine andere Größe eingetragen wird. Welche? ($\kappa = 1,4$, $c_p = 1005$ J/kg/K)

Hinweis: $\frac{\hat{p}_0}{p_0} \approx \frac{p_e}{p_a}$

$^x/_{d_{min}}$	-3	-2	-1	0	2	4	6	8
$^d/_{d_{min}}$	3	2.1	1.4	1	1.5	2.0	2.6	8
$^{A^*}/_A$								
$^p/_{p_0}$								



zur Kontrolle:

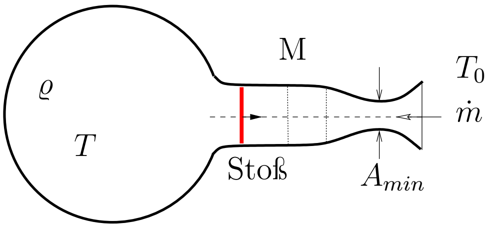
$$\frac{x_s}{d_{min}} \approx 2.489\ldots$$

x/d_{min}	-3	-2	-1	0	2	4	6	8
d/d_{min}	3	2.1	1.4	1	1.5	2.0	2.6	8
A^*/A	0.111	0.227	0.510	1	0.444	0.5	0.2959	0.03125
p/p_0	0.9965	0.98797	0.9336	0.528	0.0801	0.4682	0.4893	0.500

7.6 Intermittierender Windkanal.

Ein Kessel, der anfänglich zu 90% evakuiert ist, betreibt eine Lavaldüse bei einer Machzahl M = 3. Durch den Unterdruck im Kessel strömt Luft aus der Umgebung in den Kessel. Der Querschnitt der Meßstrecke, die sich zwischen Lavaldüse und Kessel befindet, beträgt 100 cm^2. Die maximale Meßzeit (d.h. die Zeitspanne, in der die Strömung in der Meßstrecke als stationär angesehen werden kann) betrage 20 s. Der Umgebungsdruck ist mit $p_0 = 1$ bar gegeben.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Ruhetemperatur im Kessel gleich der Außentemperatur (15 °C) sei, berechne man das mindestens notwendige Kesselvolumen.



zur Kontrolle:

$$V = 40.76 \text{ m}^3$$

Kapitel 8

Reibungsbehaftete Strömung

8.1 Druckabfall in einer Gasleitung

In einer Gasleitung ($\rho_{Gas} = 1,18$ kg/m^3, $\nu_{Gas} = 15 \cdot 10^{-6}$ m^2/s) von $0,2$ km Länge und 150 mm Durchmesser strömt das Gas mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s. Die Rauhigkeit k sei $0,075$ mm (geschweißte Stahlrohre).
Man berechne den Druckabfall Δp. Die Strömung kann als inkompressibel angenommen werden.

zur Kontrolle:

$$\Delta p = 5.82 \cdot 10^{-2}\text{bar}$$

8.2 Heizölleitung.

Durch eine gerade, horizontale Rohrleitung fließt der Volumenstrom $\dot{V}$ an Heizöl. Der reibungsbedingte Druckabfall Δp wird durch eine Ölpumpe ausgeglichen. Die Rohrleitung hat die Länge l, den Durchmesser d_0 und die relative Rauhigkeit $^k/_{d_0}$. Für die Werte $d_0 =$ 100mm, $^k/_{d_0} = 2 \cdot 10^{-3}$, $l = 750$m, $\dot{V} = 108\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$, $\nu = 8 \cdot 10^{-6}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ und $\varrho = 860\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ berechne man:

1. den Druckabfall Δp in der Rohrleitung,
2. die Antriebsleistung P, die der Pumpe zugeführt werden muß, wenn ihr wirkungsgrad $\eta_P = 0.7$ beträgt.
3. den Durchmesser d_1, auf den unter sonst gleichen Verhältnissen die Leitung erweitert werden müßte, wollte man mit der halben Antriebsleistung auskommen.

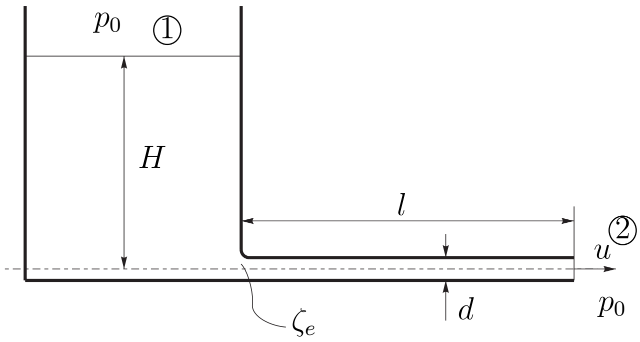
zur Kontrolle:

$$\Delta p = 12.5\text{bar} \qquad P = 53.4\text{kW} \qquad d_1 = 0.115\text{m}$$

8.3 Ausfluß aus einem Gefäß.

Aus einem Gefäß mit großer Querschnittsfläche, das bis zur Höhe $H = 20\text{m}$ gefüllt ist, strömt durch eine horizontale Rohrleitung (Länge $l = 5\text{m}$, Durchmesser $d = 5\text{mm}$, relative Rauhigkeit ${}^k\!/_d = 2 \cdot 10^{-3}$) Flüssigkeit der Dichte $\varrho = 1000\text{kgm}^{-3}$ und dynamischen Viskosität $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\text{Nsm}^{-3}$ aus. Am Einlauf des Behälters in das Rohr tritt ein Einlaufverlust auf ($\zeta_e = 0.5$).

Man bestimme die Strömungsgeschwindigkeit mit Hilfe des Colebrook-Diagramms.



zur Kontrolle:

$$u = 3.23\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

8.4 Carnotscher Stoßverlust.

Aus einem Behälter strömt Flüssigkeit durch ein Fallrohr aus, das sich unstetig von der Querschnittsfläche A_1 auf die Querschnittsfläche A_2 erweitert. Schwerebeschleunigung g, Höhendifferenz h, A_1 und Dichte ρ seien bekannt.

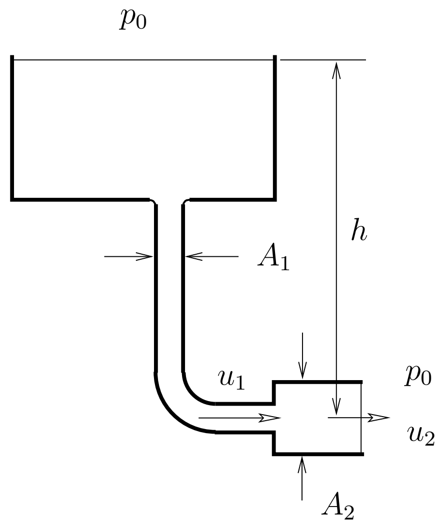
Berechnen Sie

1. den Wert des Flächenverhältnisses A_1/A_2, für den die Strömungsgeschwindigkeit u_1 maximal wird,

2. u_1 und u_2 für diesen Fall,

3. den Carnot'schen Stoßverlust Δp_{VC} und ζ_C für diesen Fall,

4. die mechanische Energie P_V, die der Strömung pro Zeiteinheit entzogen und adiabat in innere Energie umgewandelt wird.



zur Kontrolle:

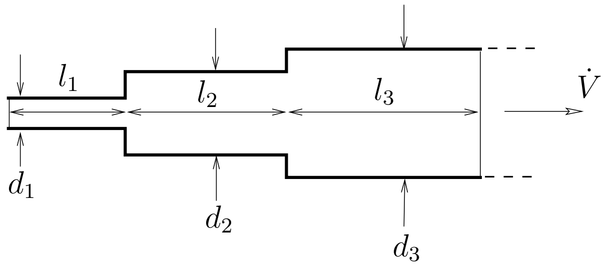
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2} \qquad u_1 = 2\sqrt{gh} \qquad u_2 = \sqrt{gh}$$

$$\zeta_C = \frac{1}{4} \qquad \Delta p_{VC} = \frac{\varrho}{2} gh \qquad P_V = 2\dot{V}\varrho gh$$

8.5 Hintereinanderschaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind n Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge aneinandergesetzt.

Man bestimme den Druckverlust Δp in Abhängigkeit vom Volumenstrom $\dot{V}$ für beliebige Rohrelemente.



Hinweis: Zur übersichtlicheren Beschreibung genügt es, die Verlustbeiwerte ζ zu verwenden.

zur Kontrolle:

$$\Delta p_v = \frac{\varrho}{2}\dot{V}^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{A_i^2} \left(\sum_j \zeta_j + \zeta_{i,i+1} \right) + \frac{1}{A_n^2} \sum_j \zeta_j \right]$$

8.6 Parallelschaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind n Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge parallel angeordnet.

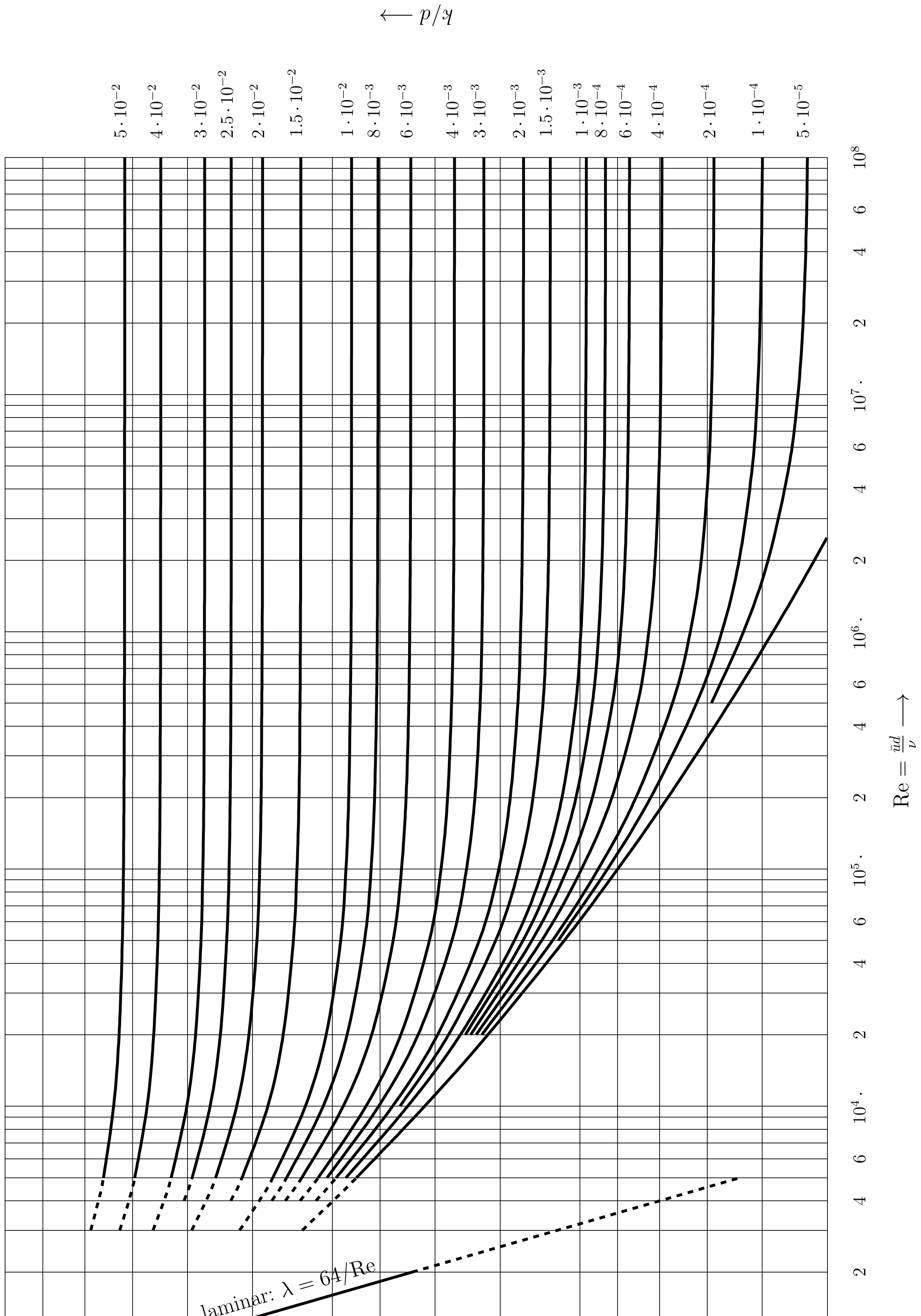
Man bestimme den Druckverlust Δp in Abhängigkeit vom Volumenstrom $\dot{V}$ für beliebige Rohrelemente.

Hinweis: Zur übersichtlicheren Beschreibung genügt es, die Verlustbeiwerte ζ zu verwenden.

Kapitel 9

Anhang

9.1 Colebrook-Diagramm.



9.2 Zustands- und Geschwindigkeitsgrößen im Stromfaden bei isentroper, stationärer Strömung ($\kappa = 1,4$)

Unterschalltabelle

M	M*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\beta = \sqrt{1-\mathrm{M}^2}$
0,05	0,055	0,998	0,999	1,000	0,086	0,999
0,1	0,109	0,993	0,995	0,998	0,172	0,995
0,15	0,164	0,984	0,989	0,996	0,256	0,989
0,2	0,218	0,973	0,980	0,992	0,337	0,980
0,25	0,272	0,958	0,969	0,988	0,416	0,968
0,3	0,326	0,939	0,956	0,982	0,491	0,954
0,35	0,379	0,919	0,941	0,976	0,562	0,937
0,4	0,431	0,896	0,924	0,969	0,629	0,917
0,45	0,483	0,870	0,906	0,961	0,690	0,893
0,5	0,535	0,843	0,885	0,952	0,746	0,866
0,55	0,585	0,814	0,863	0,943	0,797	0,835
0,6	0,635	0,784	0,840	0,933	0,842	0,800
0,65	0,684	0,753	0,816	0,922	0,881	0,760
0,7	0,732	0,721	0,792	0,911	0,914	0,714
0,75	0,779	0,689	0,766	0,899	0,941	0,661
0,8	0,825	0,656	0,740	0,887	0,963	0,600
0,85	0,870	0,623	0,714	0,874	0,980	0,527
0,9	0,915	0,591	0,687	0,861	0,991	0,436
0,95	0,958	0,559	0,660	0,847	0,998	0,312
1,0	1,000	0,528	0,634	0,833	1,000	0,000

Überschalltabelle

M	M*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\frac{\hat{p}_0}{p_0}$
1,0	1,000	0,528	0,634	0,833	1,000	1,000
1,05	1,041	0,498	0,608	0,819	0,998	1,000
1,1	1,082	0,468	0,582	0,805	0,992	0,999
1,2	1,158	0,412	0,531	0,776	0,970	0,993
1,3	1,231	0,361	0,483	0,747	0,938	0,979
1,4	1,300	0,314	0,437	0,718	0,897	0,958
1,5	1,365	0,272	0,395	0,690	0,850	0,930
1,6	1,425	0,235	0,356	0,661	0,800	0,895
1,7	1,483	0,203	0,320	0,634	0,748	0,856
1,8	1,536	0,174	0,287	0,607	0,695	0,813
1,9	1,586	0,149	0,257	0,581	0,643	0,767
2,0	1,633	0,128	0,230	0,556	0,593	0,721
2,5	1,826	0,059	0,132	0,444	0,379	0,499
3,0	1,964	0,027	0,0762	0,357	0,236	0,328
3,5	2,064	0,0131	0,0452	0,290	0,147	0,213
4,0	2,138	0,00659	0,0277	0,238	0,0933	0,139
4,5	2,194	0,00346	0,0174	0,198	0,0604	0,0917
5,0	2,236	0,00189	0,0113	0,167	0,0400	0,0618
6,0	2,295	0,000633	0,00519	0,122	0,0188	0,0297
7,0	2,333	0,000242	0,00261	0,0926	0,00960	0,0153
8,0	2,359	0,000102	0,00141	0,0725	0,00526	0,00849
9,0	2,377	0,0000474	0,000815	0,0581	0,00306	0,00496
10	2,391	0,0000236	0,000495	0,0476	0,00187	0,00304
20	2,435	0,000000209	0,0000170	0,0123	0,0000651	0,000108
∞	2,4495	0	0	0	0	0