7.2 Pitotrohr.

In Unterschallströmungen läßt sich durch Messung der Druckdifferenz Δp zwischen Staupunktsdruck p_S und statischem Druck p_∞ die Strömmungsgeschwindigkeit bestimmen. Es sei $p_\infty = 1$ bar, die Temperatur des strömenden Mediums $T_\infty = 288$ K.

Man berechne die Strömungsgeschwindigkeit v

1. bei inkompressibler Strömung,
2. für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmen ($c_p = 1005$ J/kg K, $\kappa = 1,4$)
3. und bestimme die relative Abweichung der Ergebnisse für inkompressible von jenen für kompressible Strömung für die Druckdifferenzen $\Delta p_1 = 0.3$ Pa, $\Delta p_2 = 250$ Pa und $\Delta p_3 = 4000$ Pa.

7.2.1 Inkompressibel

Im Fall der inkompressiblen Rechnung gilt die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

$$\begin{aligned} p_\infty + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 &= p_S \\ u_\infty &= \sqrt{\frac{2}{\varrho_\infty}\,(p_S - p_\infty)} \\ \rightarrow \qquad u_\infty &= \sqrt{\frac{2}{\varrho_\infty}\,\Delta p} \end{aligned}$$

mit der Zustandsgleichung

$$p_\infty = \varrho_\infty R T_\infty$$

und

$$R = c_p \frac{\kappa}{\kappa - 1}$$

folgt

$$\Rightarrow \qquad u_\infty = \sqrt{2 c_p T_\infty \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\Delta p}{p_\infty}}$$

7.2.2 Kompressibel

Im kompressiblen Fall muß man von dem Energiesatz ausgehen

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1}$$

und der Isentropenbeziehung

$$\frac{T}{T_0} = \frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{p_\infty}{p_\infty + \Delta p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

aus dem Energiesatz folgt

$$v^2 = 2\frac{c_0^2 - c^2}{\kappa - 1}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2c_0^2}{\kappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p_\infty}{p_\infty + \Delta p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

und der Ruheschallgeschwindigkeit bzw. Isentropenbeziehung für die Ruhetemperatur

$$c_0^2 = c_p T_0 \left(\kappa - 1\right)$$

$$T_0 = T_\infty \left(\frac{p_\infty}{p_\infty + \Delta p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2c_p T_\infty \left[\left(\frac{p_\infty}{p_\infty + \Delta p}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right]}$$

7.2.3 relative Abweichung für die Druckdifferenzen $\Delta p_1 = 0.3$ Pa, $\Delta p_2 = 250$ Pa und $\Delta p_3 = 4000$ Pa

Die relative Abweichung der inkompressiblen Rechung von der kompressiblen Rechnung definieren wir mit

$$f = \frac{v_k - v_i}{v_k}.$$

Δp	v_i	v_k	f
0.3 Pa	0.7044024823 ...	0.7044021049 ...	$-5.36e-7$
250 Pa	20.334348140 ...	20.325281231 ...	$-4.46e-4$
4000 Pa	81.337392560 ...	80.767343115	$-7.06e-3$