Kapitel 7

Kompressible Strömung

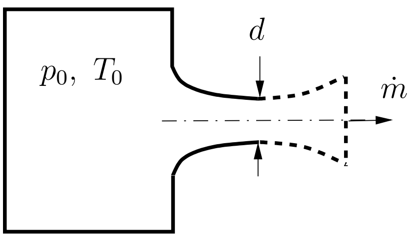
7.1 Ausströmen aus einem Kessel.

Aus einem Kessel (Ruhedruck $p_0 = 8$ bar, Ruhetemperatur $T_0 = 350$ K) strömt durch eine Öffnung Luft aus. Der Außendruck ist $p_a = 1$ bar, der minimale Durchmesser ist $d = 50$ mm. $c_p = 1005$ J/kg/K, $\kappa = 1,4$. Man berechne:

1. die Ausströmgeschwindigkeit u und den Massenstrom $\dot{m}$ für den Fall, daß der kleinste Querschnitt der Austrittsquerschnitt ist.

2. die Ausströmgeschwindigkeit u_e im Endquerschnitt, $\dot{m}$ und Austrittsquerschnitt A_e für den Fall, daß die Öffnung eine ideale Lavaldüse darstellt (Überschall, $p_e = p_a = 1$ bar).

3. die in den Punkten 1. und 2. gesuchten Größen für $p_0 = 1.5$ bar, wobei aber für die zweite Aufgabenstellung der in 2. berechnete Endquerschnitt der Lavaldüse zu verwenden ist (Lavaldüse mit Stoß).



7.1.1 Ausströmgeschwindigkeit u, Massenstrom $\dot{m}$ für $p_0 = 8$ bar (konvergente Düse)

Wird Schallgeschwindigkeit in $A_{min} = A_e$ erreicht?
Das testen wir mit dem geg. Ruhedruckverhältnis und dem kritische Ruhedruckverhältnis, entweder aus der ITB für M = M* = 1 oder entsprechend:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.528 \qquad \text{(oder aus Isentropentabelle für M = M}^* = 1)$$

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{1}{8} = 0.125 < \frac{p^*}{p_0} = 0.528$$
$$\rightarrow \mathrm{M} = 1 \text{ wird erreicht}$$
$$\rightarrow A^* = A_{min} = A_e$$

Somit muß die Ausströmgeschwindigkeit u_e die kritische Schallgeschwindigkeit sein:

$$u_e = c^*$$
$$\frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}$$
$$c_0 = \sqrt{c_p T_0 (\kappa - 1)}$$
$$\rightarrow c_0 = 375.10 \text{ m/s}$$
$$\rightarrow c^* = 342.42 \text{ m/s}$$
$$\Rightarrow u_e = 342.42 \text{ m/s}$$

Herleitung $\frac{c^*}{c_0}$

Energieerhaltung:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{v^2}{2}$$

Schallgeschwindigkeit für ideale Gase:

$$c^2 = \frac{\kappa p}{\varrho}$$

Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$p = c_p \frac{\kappa - 1}{\kappa} \varrho T$$

$$\rightarrow c_p T = \frac{c^2}{\kappa - 1}$$
$$\rightarrow \frac{c_0^2}{\kappa - 1} = \frac{c^2}{\kappa - 1} + \frac{v^2}{2}$$
$$= \frac{c^{*2}}{\kappa - 1} + \frac{c^{*2}}{2} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} c^{*2}$$

$$\Rightarrow \frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}}$$

Der Massenstrom $\dot{m}$ folgt aus:

$$\dot{m} = \varrho u A = \varrho_e u_e A_e = \varrho^* \, A^* \, c^*$$
$$\frac{\varrho^*}{\varrho_0} = 0.634 \qquad \text{aus Isentropentabelle}$$

ideale Gas-Gleichung:

$$\varrho_0 = \frac{p_0}{T_0} \frac{\kappa}{c_p \, (\kappa - 1)}$$
$$\rightarrow \varrho_0 = 7.96 \text{ kg/m}^3$$
$$\rightarrow \varrho^* = 5.05 \text{ kg/m}^3$$

mit $A^* = A_{min}$:

$$\Rightarrow \dot{m} = 3.39 \text{ kg/s}$$

7.1.2 Ausströmgeschwindigkeit u_e, Massenstrom $\dot{m}$ und Austrittsquerschnitt A_e für $p_0 = 8$ bar (Lavaldüse)

Wird Schallgeschwindigkeit in $A_{min} = A_e$ erreicht?

M = 1 wird in A_{min} erreicht da $\frac{p_a}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}$. Ausströmgeschwindigkeit u_e:

$$u_e = {\text{M}^*}_e \, c^*$$
$${\text{M}^*}_e = 1.638 \text{ aus Isentropentabelle (Überschall) für } \tfrac{p_a}{p_0} = 0.125$$
$$c^* = 342.42 \text{ m/s s.o. (hängt nur von Ruhegrößen ab)}$$
$$\Rightarrow u_e = 560.88 \text{ m/s}$$

Der Massenstrom $\dot{m}$ ist wieder:

$$\dot{m} = \varrho u A = \varrho_e u_e A_e = \varrho^* \, u^* \, A^*$$
$$\Rightarrow \dot{m} = 3.39 \text{ kg/s}$$

Austrittsquerschnitt A_e:

$$\varrho_e u_e A_e = \varrho^* \, c^* \, A^*$$
$$\rightarrow \frac{A^*}{A_e} = \frac{\varrho_e u_e}{\varrho^* c^*} = 0.583 \qquad \text{aus Isentropentabelle bei } \tfrac{p_e}{p_0} = 0.125$$
$$A^* = A_{min} = \frac{d^2 \pi}{4}$$
$$\Rightarrow \quad d_e = 65.5 \text{ mm}$$

7.1.3 Alle Größen für $p_0 = 1.5$ bar.

Ausströmgeschwindigkeit u und Massenstrom $\dot{m}$ für die konvergente Düse

Wird Schallgeschwindigkeit in $A_{min} = A_e$ erreicht?

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.528 \qquad \text{oder aus Isentropentabelle für } \mathrm{M} = \mathrm{M}^* = 1$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{M} = 1$ wird nicht erreicht, da $\frac{p_a}{p_0} > \frac{p^*}{p_0}$! $\Rightarrow$ **reiner Unterschall**

$$u = \mathrm{M}^* c^* = u_e$$

Isentropentabelle Unterschall + lineare Interpolation:

$$\mathrm{M}^* = 0.810$$

Ausströmgeschwindigkeit u_e:

$$\begin{aligned} u_e &= \mathrm{M}^*\, c^* \\ \text{mit } c^* &= 342.42 \text{ m/s} \\ \Rightarrow \qquad u_e &= 277.36 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Massenstrom $\dot{m}$:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \varrho u A = \varrho_e u_e A_e \\ \frac{\varrho_e}{\varrho_0} &= 0.748 \qquad \text{aus Isentropentabelle } \tfrac{p_a}{p_0} = 0.667 \\ \text{mit } \varrho_0 &= 1.49 \text{ kg/m}^3 \\ \rightarrow \varrho_e &= 1.12 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

mit $A_e = A_{min} = \frac{d^2\pi}{4}$:

$$\Rightarrow \dot{m} = 0.61 \text{ kg/s}$$

Ausströmgeschwindigkeit u_e und Massenstrom $\dot{m}$ für die Lavaldüse

Betriebsart?
Laut Angabe ist die zuvor berechnete Lavaldüse zu verwenden. D.h.

$$\begin{aligned} \frac{A_{min}}{A_e} &= \frac{A^*}{A_e} = 0.583 \text{ s.o.} \\ \frac{A_{min}}{A_e} &= \frac{\varrho u}{\varrho^* c^*} \\ \text{Isentropentabelle (Unterschall): } \frac{p_e}{p_0} &\approx 0.9 \\ \text{Isentropentabelle (Überschall): } \frac{p_e}{p_0} &\approx 0.12 \\ \rightarrow \tfrac{p_a}{p_0} &= 0.667 \text{ liegt dazwischen} \\ &\rightarrow \text{ Verdichtungsstoß} \end{aligned}$$

Lage x_s des Stoßes? Iteration!
(Formeln siehe Skriptum)

1. Annahme: $\dfrac{A^*}{A_s}$ zwischen $\left[\dfrac{A^*}{A_e};1\right]$

2. Ruhedruckverlust $\dfrac{\hat{p}_0}{p_0}$: Isentropentabelle (*Über*schall) für $\dfrac{\varrho_s u_s}{\varrho^* c^*} = \dfrac{A^*}{A_s}$

3. $\dfrac{\hat{A}^\star}{A^\star} = \dfrac{p_0}{\hat{p}_0} = \dfrac{1}{\frac{\hat{p}_0}{p_0}_{1.}}$

4. $\dfrac{\hat{A}^\star}{A_e} = \underbrace{\dfrac{\hat{A}^\star}{A^\star}}_{2.} \cdot \underbrace{\dfrac{A^\star}{A_e}}_{\text{Geometrie}}$

5. $\frac{p_e}{\hat{p}_0}$: aus Isentropentabelle (*Unter*schall) für $\dfrac{\varrho u}{\varrho^* c^*} = \underbrace{\dfrac{\hat{A}^*}{A_e}}_{3.}$

6. Enddruck p_e: $p_e = \underbrace{\dfrac{p_e}{\hat{p}_0}}_{4.} \cdot \underbrace{\dfrac{\hat{p}_0}{p_0}}_{1.} p_0$

7. Wahl von neuem $\dfrac{A^*}{A_s}$ bzw. $\dfrac{\hat{p}_0}{p_0}$ $\rightarrow$ 1. bzw. 2.

0. $\frac{A^*}{A_s}$	1. $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$	2. $\frac{\hat{A}^*}{A^\star}$	3. $\frac{\hat{A}^*}{A_e}$	4. $\frac{p_e}{\hat{p}_0}$	5. p_e
0.748	0.856	$\frac{1}{0.856} = 1.168$	$1.168 \cdot 0.583 = 0.681$	0.874	$0.874 \cdot 0.856 \cdot 1.5 = 1.122$ bar
0.643	0.767	$\frac{1}{0.767} = 1.304$	$1.304 \cdot 0.583 = 0.760$	0.835	$0.835 \cdot 0.767 \cdot 1.5 = 0.961$ bar
0.668	0.789	$\frac{1}{0.789} = 1.267$	$1.267 \cdot 0.583 = 0.739$	0.846	$0.846 \cdot 0.739 \cdot 1.5 = 1.001$ bar

Lage von x_s, aus $\frac{A^*}{A_s}$, wenn $A(x)$!

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad & \mathrm{M}_e = 0.49 \\
\rightarrow \quad & \mathrm{M}_e^* = 0.53 \\
\rightarrow \quad & u_e = \mathrm{M}_e^* c^* = 183.18 \text{ m/s} \\
& \varrho_0 = 1.49 \text{ kg/m}^3 \text{ w.o.} \\
& \frac{\varrho^*}{\varrho_0} = 0.634 \text{ w.o.} \\
& T_e = \frac{T_e}{T_0} \cdot T_0 = 333.65 \text{ K} \\
& \varrho_e = 1.044 \text{ kg/m}^3 \\
\rightarrow\ & \dot{m} = \varrho^*\, c^*\, A^* = \varrho_e u_e A_e = 0.635 \text{ kg/s}
\end{aligned}$$