Kapitel 6

Instationäre Bernoulli-Gleichung

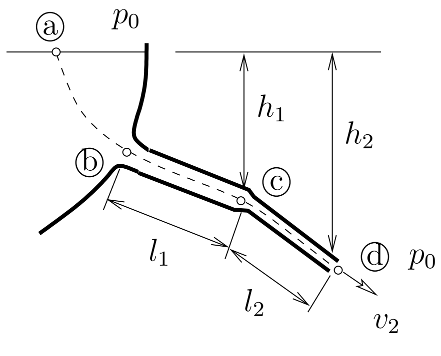
6.1 Druckleitung eines Stausees.

Aus einem Stausee führt eine Rohrleitung, die zunächst durch einen Schieber verschlossen ist. Der Schieber wird zur Zeit $t = 0$ plötzlich geöffnet.
Für die Werte $h_1 = 70$ m, $h_2 = 100$ m, $l_1 = 250$ m, $l_2 = 50$ m, $d_1 = 3,5$ m, $d_2 = 0,7$ m und $\rho = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3 berechne man

1. die in den beiden Teilleitungen 1 und 2 unmittelbar nach Öffnen des Schiebers herrschenden Beschleunigungen a_{01} und a_{02}.

2. den Überdruck $p_C - p_0$, der unmittelbar nach Öffnen des Schiebers im Punkt C herrscht.

3. die Ausströmgeschwindigkeit v_2 als Funktion der Zeit, $v_2 = v_2(t)$.



6.1.1 Beschleunigungen $a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}$ und $a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}$

Instationäre Bernoulligleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

$$\boxed{\text{reibungsfrei, inkompressibel, entlang Stromlinie}}$$

ⓐ-ⓓ:

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{0^2}{2} + g \cdot h_2 = \int\limits_{ⓐ}^{ⓓ} \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \frac{p_0}{\varrho} + \frac{u_2^2}{2} + g \cdot 0$$

$$\int_{ⓐ}^{ⓓ} \dots \,\mathrm{d}s = \int_{ⓐ}^{ⓑ} \dots \,\mathrm{d}s + \int_{ⓑ}^{ⓒ} \dots \,\mathrm{d}s + \int_{ⓒ}^{ⓓ} \dots \,\mathrm{d}s$$

$$\int\limits_{ⓐ}^{ⓑ} \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}s \approx 0$$

(bis knapp vor den Einlauf: $u \ll 1$; im Einlauf zwar große Beschleunigung, aber kleine Länge)

$$\begin{aligned} \int\limits_{ⓑ}^{ⓒ} \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}s &= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \int\limits_{ⓑ}^{ⓒ} \mathrm{d}s \\ &= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} l_1 \end{aligned}$$

mit Massenbilanz MB: $u_1 \frac{d_1^2\pi}{4} = u_2 \frac{d_2^2\pi}{4} \rightarrow$

$$= \frac{d_2^2}{d_1^2} l_1 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\int\limits_{ⓒ}^{ⓓ} \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}s = l_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow g h_2 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{d_2^2}{d_1^2} l_1 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + l_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(l_2 + \frac{d_2^2}{d_1^2} l_1\right)}_{L} = g h_2 - \frac{u_2^2}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}\left(g h_2 - \frac{u_2^2(t)}{2}\right)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $u_2 = 0$:

$$\Rightarrow a_{02} = \left.\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{g h_2}{L},$$

aus Massenbilanz $u_1 d_1^2 = u_2 d_2^2$: $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} d_1^2 = \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} d_2^2$

$$\Rightarrow \qquad a_{01} = \frac{d_2^2}{d_1^2} a_{02}$$

6.1.2 Druck an der Stelle C nach Öffnen des Schiebers

ⓐ-ⓒ:

$$\frac{p_0}{\varrho} + g h_2 = \frac{p_{ⓒ}}{\varrho} + \frac{u_1^2}{2} + g\left(h_2 - h_1\right) + l_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $u_1 = 0$, $\left.\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = a_{01}$:

$$\Rightarrow \qquad p_{ⓒ} - p_0 = \varrho\left(g h_1 - a_{01} l_1\right)$$

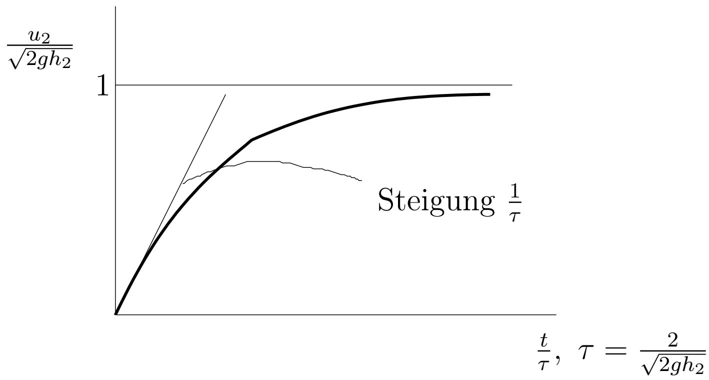
6.1.3 Zeitlicher Verlauf $u_2(t)$

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}\left(g h_2 - \frac{u_2^2(t)}{2}\right)$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{g h_2 - \frac{u_2^2}{2}} = \frac{\mathrm{d}t}{L}$$
$$\frac{1}{g h_2} \frac{\mathrm{d}u_2}{1 - \underbrace{\frac{u_2^2}{2 g h_2}}_{x^2}} = \frac{\mathrm{d}t}{L}$$
$$x = \frac{u_2}{\sqrt{2 g h_2}}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u_2}{\sqrt{2 g h_2}}$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{\mathrm{d}t}{2L}\sqrt{2 g h_2}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \operatorname{arctanh} x$$
$$\Rightarrow \operatorname{arctanh} \frac{u_2}{\sqrt{2 g h_2}} = t \frac{\sqrt{2 g h_2}}{2L}$$

$$\frac{u_2(t)}{\sqrt{2 g h_2}} = \tanh\left(\frac{\sqrt{2 g h_2}}{2L} t\right)$$



Zum Vergleich stationär gerechnet:

$$
\begin{aligned}
\text{ⓐ} - \text{ⓓ}: \quad \frac{p_0}{\varrho} + gh_2 &= \frac{p_0}{\varrho} + \frac{u_2^2}{2} \\
\Rightarrow \qquad u_2 &= \sqrt{2gh_2}
\end{aligned}
$$