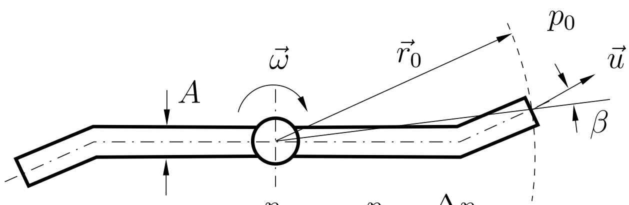
Kapitel 5

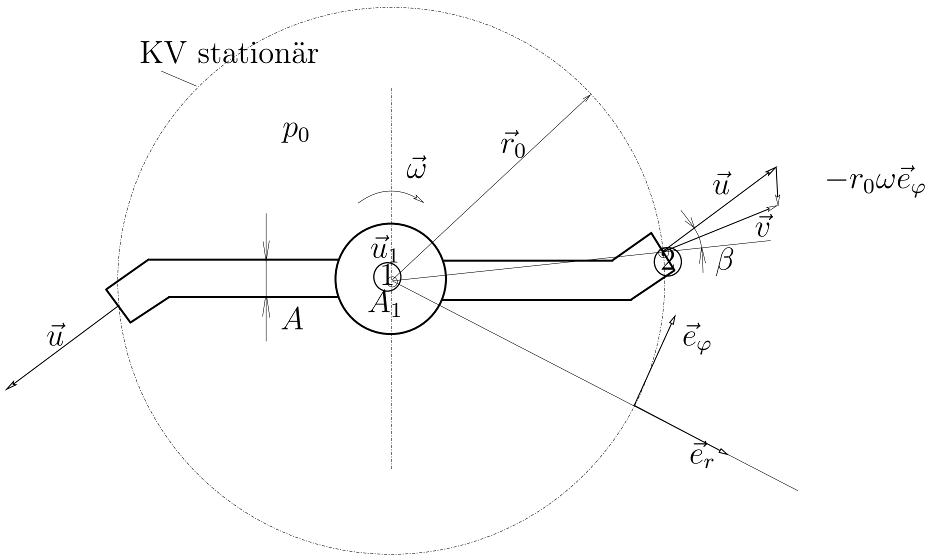
Drehimpulssatz

5.1 Rasensprenger.

Ein zweiarmiger Rasensprenger mit vertikaler Achse muss bei stationärer Drehung ein Reibungsmonent $\vec{M}_r$ überwinden. Der Wasserdruck in der Zuleitung unmittelbar vor Eintritt in die beiden Arme beträgt $p_0 - \Delta p$ mit dem Atmosphärendruck p_0. Die Querschnittsfläche jedes Armes ist A und die Querschittsfläche der Zuleitung $A_1 = 2A$. Weiters sind auch r_0, β und ρ bekannt.



Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, mit welcher der Rasensprenger rotiert, sowie den Volumenstrom $\dot{V}$.



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = u\cos\beta\vec{e}_r + u\sin\beta\vec{e}_\varphi$

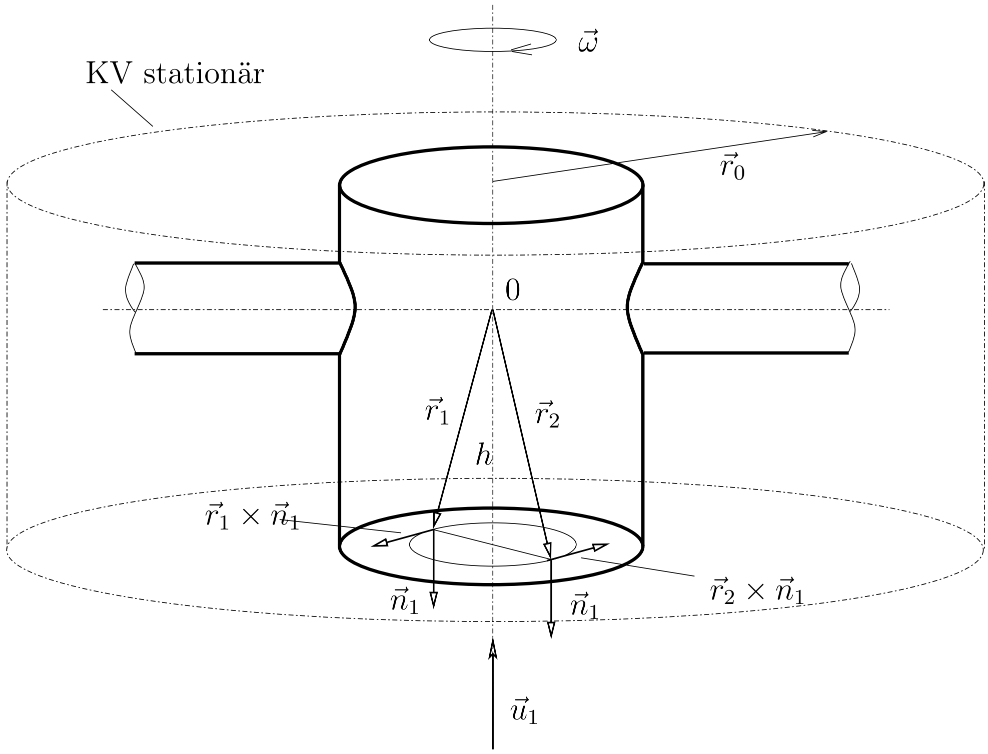
... Austrittsgeschwindigkeit im bewegten Bezugssystem

$\vec{v} = \vec{u} + r_0\omega(-\vec{e}_\varphi) = u\cos\beta\vec{e}_r + (u\sin\beta - r_0\omega)\vec{e}_\varphi$

... Austrittsgeschwindigkeit im ruhenden Bezugssystem

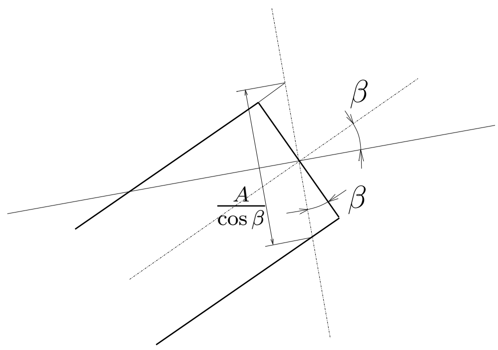
5.1.1 Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Kontrollvolumen



Massenbilanz MB

für $r_0 \gg r_A = \sqrt{A/\pi}$ gilt:



$$A: \quad v_n = \vec{u}\cdot\vec{e}_r = (u\cos\beta\vec{e}_r + u\sin\beta\vec{e}_\varphi)\,\vec{e}_r = u\cos\beta$$

$$A_1: \quad v_n = \vec{u}_1 \cdot (-\vec{e}_z) = -u_1$$

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} \rho v_n \,\mathrm{d}O = 0 = -\rho u_1 A_1 + 2\rho u \cos\beta \frac{A}{\cos\beta} \quad \rightarrow \quad u_1 = u$$

Bernoulli-Gleichung für ein rotierendes Bezugssystem

allgemein:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{r^2\omega^2}{2} = \mathrm{const}}$$

entlang einer Stromlinie von ①-②, $\rho = const$:

$$\frac{p_0 - \Delta p}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{r_0^2\omega^2}{2}$$

$$\rightarrow \Delta p = \frac{\rho r_0^2 \omega^2}{2}$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho r_0^2}}$$

5.1.2 Volumenstrom $\dot{V}$

Drehimpulsbilanz DIB
für ein ruhendes Bezugssystem:

$$\boxed{\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \,\mathrm{d}O + \oint_{\partial \mathrm{KV}} p \left(\vec{r} \times \vec{n}\right) \,\mathrm{d}O = \int_{\mathrm{KV}} \varrho \left(\vec{r} \times \vec{g}\right) \,\mathrm{d}V + \vec{M}_r}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \,\mathrm{d}O \quad & \ldots \quad \text{konvektiver Term} \\
\oint_{\partial \mathrm{KV}} p \left(\vec{r} \times \vec{n}\right) \,\mathrm{d}O \quad & \ldots \quad \text{Druckterm} \\
\int_{\mathrm{KV}} \varrho \left(\vec{r} \times \vec{g}\right) \,\mathrm{d}V \quad & \ldots \quad \text{Schwerkraftterm} \\
\vec{M}_r \quad & \ldots \quad \text{auf das Medium wirkende Moment}
\end{aligned}$$

konvektiver Term

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_r \times \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

Für A_1 gilt: $\vec{r} = r\vec{e}_r - h\vec{e}_z$

$$\int_{A_1} \rho v_n \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \mathrm{d}O = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}} \rho(-u_1)\left(r\vec{e}_r - h\vec{e}_z\right) \times \left(u_1 \vec{e}_z\right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$
$$= \rho u_1^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{e}_\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{0} \int_0^{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}} r^2 \, \mathrm{d}r = 0$$

Für A gilt $r_0 \gg r_A = \sqrt{A/\pi}$ und somit $\vec{r} \approx \vec{r}_0$:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r}_0 \times \vec{v} = \left(r_0 \vec{e}_r\right) \times \left(u \cos\beta \vec{e}_r + \left(u \sin\beta - r_0 \omega\right) \vec{e}_\varphi\right)$$
$$= r_0 \left(u \sin\beta - r_0\omega\right) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \mathrm{d}O = 2\rho u \cos\beta r_0 \left(u \sin\beta - r_0\omega\right) \frac{A}{\cos\beta} \vec{e}_z$$

Druckterm

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p \left(\vec{r} \times \vec{n}\right) \mathrm{d}O = \underbrace{\oint_{\partial \mathrm{KV}} p_0 \left(\vec{r} \times \vec{n}\right) \mathrm{d}O}_{0} - \int_{A_1} p_0 \left(\vec{r} \times \vec{n}\right) \mathrm{d}O$$
$$+ \int_{A_1} \left(p_0 - \Delta p\right) \left(\vec{r} \times \vec{n}\right) \mathrm{d}O$$
$$= -\Delta p \int_{A_1} \left(r\vec{e}_r - h\vec{e}_z\right) \times \left(-\vec{e}_z\right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$
$$= -\Delta p \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{e}_\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{0} \int_0^{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}} r^2 \, \mathrm{d}r = 0$$

Anschauliche Begründung:
Zu jedem Punkt in A_1 mit Ortsvektor $\vec{r}_1$ und Richtungsvektor $\vec{r}_1 \times \vec{n}_1$ gibt es genau einen gegenüberliegenden Punkt mit Ortsvektor $\vec{r}_2$ und entgegengesetztem Richtungsvektor $\vec{r}_2 \times \vec{n}_1$. Das Druckintegral über die Fläche A_1 verschwindet.

Schwerkraftterm

$$\int\limits_{\mathrm{KV}} \varrho \left(\vec{r} \times \vec{g}\right) \mathrm{d}V = 0 \quad \text{aus (obigen) Symmetriegründen!}$$

Moment

$$\vec{M} = \vec{M}_r = M_r \vec{e}_z$$

Das alles eingesetzt in die DIB ergibt

$$2\rho r_0 u \left(u \sin\beta - r_0\omega\right) A \vec{e}_z = M_r \vec{e}_z$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad & 2\rho r_0 u^2 \sin\beta A - 2\rho r_0^2 u\omega A = M_r \\
\Rightarrow \quad & u^2 - \frac{r_0\omega}{\sin\beta}u - \frac{M_r}{2\rho r_0 \sin\beta A} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \quad \text{für} M_r > 0: \quad u = \frac{r_0\omega}{2\sin\beta} + \sqrt{\left(\frac{r_0\omega}{2\sin\beta}\right)^2 + \frac{M_r}{2\rho r_0 \sin\beta A}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \dot{V} &= 2Au \\
&= \frac{Ar_0\omega}{\sin\beta} + \sqrt{\left(\frac{Ar_0\omega}{\sin\beta}\right)^2 + \frac{2AM_r}{\rho r_0 \sin\beta}}
\end{aligned}
$$