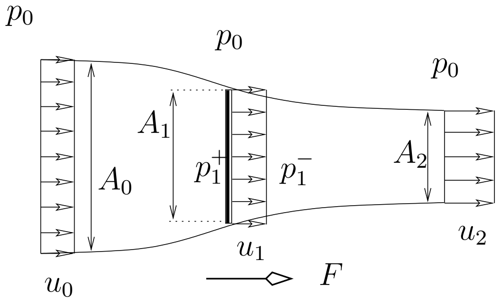
4.6 Propeller.

Ein Propeller (Kreisfläche A_1) bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 durch ruhende Luft, auf die er die Schubkraft F ausübt. Die Skizze zeigt den für einen mit dem Propeller bewegten Beobachter stationären Strömungsvorgang. Die den Propellerkreis durchsetzende Luft strömt mit der Fluggeschwindigkeit u_0 in einem Strahl der Querschnittsfläche A_0 gegen den Propeller an und strömt in einiger Entfernung dahinter als Strahl der Querschnittsfläche A_2 mit der Geschwindigkeit $u_2 > u_1$ ab.

Ermitteln Sie eine Formel für die vom Propeller aufzubringende Leistung P und werten Sie sie für $u_0 = 40$ m/s, $A_1 = 3$ m^2, $\rho = 1,3$ kg/m^3 und $F = 2$ kN aus.



Wir stellen die Leistungsbilanz im System Propeller auf, indem wir die einströmende Leistung mit der ausströmenden Leistung bilanzieren

$$A_0 u_0 \left(p_0 + \frac{\varrho}{2} u_0^2\right) + P = A_2 u_2 \left(p_0 + \frac{\varrho}{2} u_2^2\right)$$

mit der Massenbilanz für konstante Dichte folgt die Volumenbilanz $\dot{V} = uA = \text{const} = u_0 A_0 = u_1 A_1 = u_2 A_2$ und damit

$$\begin{aligned} \dot{V}\left(p_0 + \frac{\varrho}{2} u_0^2\right) + P &= \dot{V}\left(p_0 + \frac{\varrho}{2} u_2^2\right) \\ p_0 + \frac{\varrho}{2} u_0^2 + \frac{P}{\dot{V}} &= p_0 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 \\ \rightarrow \quad P &= \dot{V} \frac{\varrho}{2}\left(u_2^2 - u_0^2\right). \end{aligned}$$

- geg. A_1, u_0, F, ρ
- unbekannt $\dot{V}$ bzw. u_1, u_2

Die lokale Betrachtung des Propellers (Kräftebilanz) unter der Verwendung der Bernoulligleichungen vor und nach dem Propeller

$$p_0 + \frac{\varrho}{2} u_0^2 = p_1^+ + \frac{\varrho}{2} u_1^2, \qquad p_1^- + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_0 + \frac{\varrho}{2} u_2^2, \quad A_1\left(p_1^- - p_1^+\right) = F$$

liefert eine Ausdruck für F und u_2

$$\begin{aligned} p_0 - p_1^+ + \frac{\varrho}{2} u_0^2 &= p_0 - p_1^- + \frac{\varrho}{2} u_2^2 \\ \rightarrow \quad \frac{F}{A_1} &= p_1^- - p_1^+ = \frac{\varrho}{2}\left(u_2^2 - u_0^2\right) \\ \rightarrow \quad u_2^2 &= u_0^2 + \frac{2}{\varrho}\frac{F}{A_1}. \end{aligned}$$

Einen zweite Darstellung der Kraft F erhält man aus der Betrachtung der Stromröhre (globale Betrachtung) und der Volumenbilanz $\dot{V} = uA = \text{const} = u_0A_0 = u_1A_1 = u_2A_2$

$$F = \rho u_2^2 A_2 - \rho u_0^2 A_0 = \rho u_1 A_1 (u_2 - u_0).$$

Vergleich der beiden Darstellung liefert u_1 und damit $\dot{V} = u_1A_1$

$$u_1 = \frac{u_0 + u_2}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad & P = \dot{V}\frac{F}{A_1} \\
& \dot{V} = A_1 \frac{u_0 + u_2}{2} \\
& P = A_1 \frac{u_0 + u_2}{2}\frac{F}{A_1} = F\frac{u_0 + u_2}{2} \\
\Rightarrow \quad & P = F\frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 + \frac{2}{\varrho}\frac{F}{A_1}}}{2} \\
& P = 2000\frac{40 + \sqrt{1600 + \frac{2}{1.3}\frac{2000}{3}}}{2} \\
\Rightarrow \quad & P = 91.24 \cdot 10^3 \ldots \approx 91 \text{ kW}
\end{aligned}$$