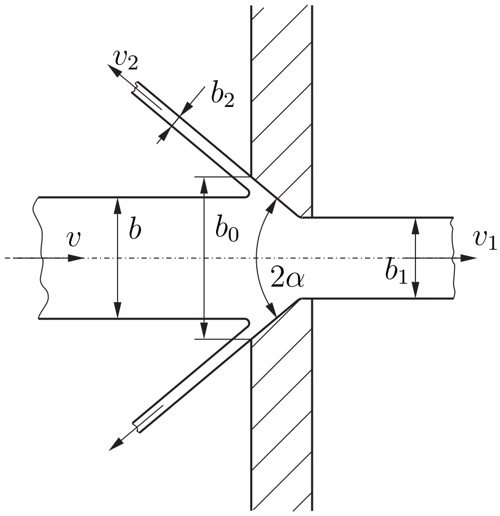
4.4 Düse.

Ein ebener Strahl der Breite b strömt mit der Geschwindigkeit v auf eine konvergente Düse Schlitzdüse (Eintrittsbreite $b_0 > b$, Austrittsbreite $b_1 < b$). Der Öffnungswinkel der Düse beim Eintrittsquerschnitt ist 2α. Der Umgebungsdruck vor und hinter der Düse ist mit p_0 gegeben, die Dichte sei ϱ.

Man berechne aus den gegebenen Größen unter Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien Strömung

1. die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 des durchtretenden und des reflektierten Strahls
2. den Breite b_2 eines reflektierten Strahls
3. sowie die Kraft $\vec{F}$ des Flüssigkeitsstrahls (bezogen auf die Tiefeneinheit) auf die Düse.



4.4.1 die Geschwindigkeiten v_1 und v_2

Die Ströumng ist reibungsfrei und inkompressibel, folglich gilt die Bernoulli-Gleichung. Da es sich des weiteren um einen Freistrahl handelt und die Schwerkraft keinen Rolle spielt, bleiben die Geschwindigkeiten erhalten!

$$v_1 = v_2 = v$$

4.4.2 die Breite b_2 *eines* reflektierten Strahls

... erhält man aus der Massenbilanz.

$$\dot{m} = \varrho u A = \text{const}$$

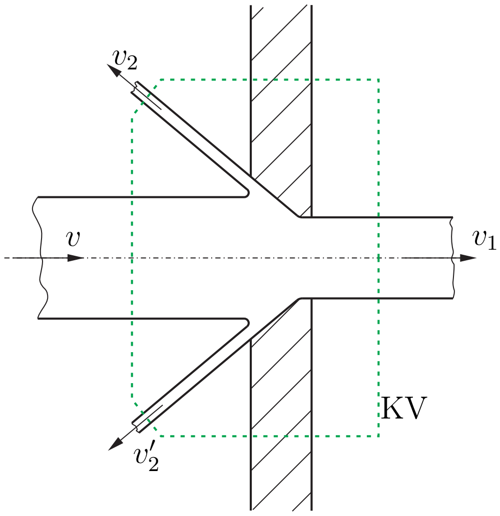
$$\begin{aligned} v \cdot b \cdot t &= v_1 \cdot b_1 \cdot t + 2v_2 \cdot b_2 \cdot t \\ vb &= vb_1 + 2vb_2 \\ b_2 &= \frac{b - b_1}{2} \end{aligned}$$

4.4.3 die Kraft $\vec{F}$ auf die Düse

... aus der Impulsbilanz,

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v} \,\mathrm{d}O + \oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n} \,\mathrm{d}O = \int_{\mathrm{KV}} \varrho \vec{g} \,\mathrm{d}V + \Sigma \vec{F}_K.$$

Das Kontrollvolumen wählen wir zB so:



Die Normalvektoren sind dann

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2' = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

die Geschwindigkeiten

$$\vec{v} = v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 = v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = v\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2' = v\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

und die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$:

$$v_n = -v \qquad v_{1n} = v \qquad v_{2n} = v \qquad v_{2n}' = v$$

Somit erhalten wir für die Impulsbilanz:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v} \,\mathrm{d}O &= \varrho \left(v_n \vec{v} bt + v_{1n} \vec{v}_1 b_1 t + v_{2n} \vec{v}_2 b_2 t + v_{2n}' \vec{v}_2' b_2 t \right) \\
&= \varrho v^2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \left(b_1 - b \right) + \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} b_2 t - \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} b_2 t \right) \\
&= \varrho v^2 t \left(b_1 - b + (b_1 - b)\cos\alpha \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \varrho v^2 t \left(b_1 - b \right) \left(1 + \cos\alpha \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n} \,\mathrm{d}O = \vec{0}$$

$$\int\limits_{\mathrm{KV}} \varrho \vec{g}\,\mathrm{d}V = \vec{0}$$

$$\Sigma \vec{F}_K = -\vec{F}$$

somit folgt für die Kraft $\vec{F}$ pro Tiefeneinheit

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{t} = -\varrho v^2 \left(b_1 - b\right)\left(1 + \cos\alpha\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$