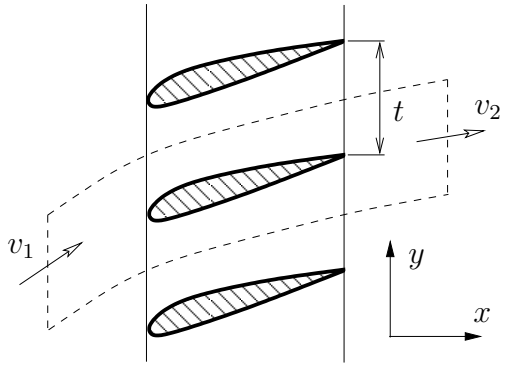
4.3 Schaufelgitter.

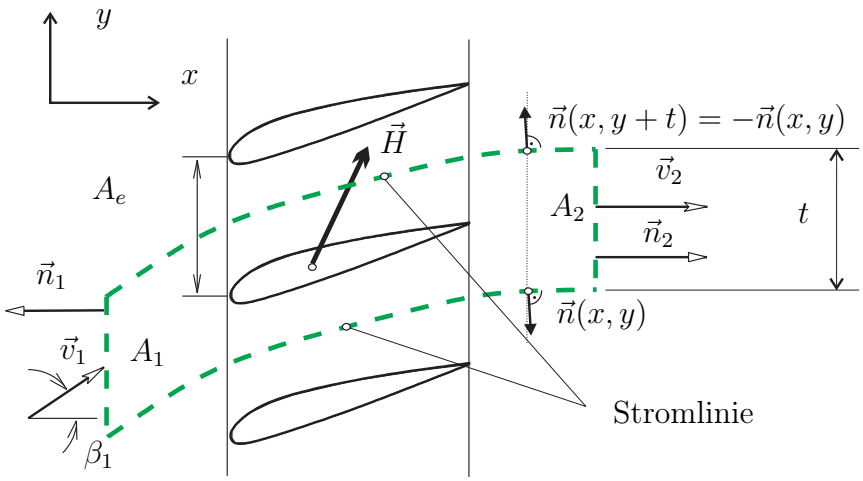
Eine Parallelströmung strömt ein ebenes Schaufelgitter unter dem Winkel $\beta_1 = \pi/6$ an, die Abströmung erfolgt unter dem Winkel $\beta_2 = 0$. Die Anströmgeschwindigkeit betrage $v_1 = 5$ m/s, der Eintrittsquerschnitt eines Schaufelkanals sei $A_e = 0,2$ m^2.

Man bestimme die auf eine Einzelschaufel wirkenden Kräfte unter der Annahme, daß es sich beim strömenden Medium um Wasser handelt ($\varrho = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3) und die Reibungskräfte vernachlässigt werden können.



4.3.1 Kraft $\vec{F}$

Kontrollvolumen



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = v_1 \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \end{pmatrix}, \quad v_{1n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = v_1 \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_1 \cos\beta_1$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{2n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

Impulsbilanz IB

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O + \oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = \underbrace{\int_{\mathrm{KV}} \varrho \vec{g}\,\mathrm{d}V}_{\text{vernachlässigt}} + \Sigma \vec{F}_K$$

Konvektiver Anteil:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O &= -\varrho v_1 \begin{pmatrix}\cos\beta_1\\ \sin\beta_1\end{pmatrix} v_1 \cos\beta_1 A_e + \varrho v_2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} v_2 A_e \\ &= -\varrho v_1^2 \cos\beta_1 A_e \begin{pmatrix}\cos\beta_1\\ \sin\beta_1\end{pmatrix} + \varrho v_2^2 A_e \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

v_2 aus Massenbilanz in integraler Form:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n\,\mathrm{d}O = 0 &= -\varrho v_1 \cos\beta_1 A_e + \varrho v_2 A_e \\ v_2 &= v_1 \cos\beta_1\end{aligned}$$

$$\rightarrow \oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\,\mathrm{d}O = -\varrho v_1^2 A_e \cos\beta_1 \begin{pmatrix}0\\ \sin\beta_1\end{pmatrix}$$

Druckintegral:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O &= p_1 A_e \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + p_2 A_e \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= (p_2 - p_1)\, A_e \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Druckdifferenz aus Bernoulligleichung:

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{\varrho} + \frac{v_1^2}{2} + gh &= \frac{p_2}{\varrho} + \frac{v_2^2}{2} + gh \\ p_2 - p_1 &= \frac{\varrho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) \\ &= \frac{\varrho}{2} v_1^2 \sin^2\beta_1\end{aligned}$$

$$\rightarrow \oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = \frac{\varrho}{2} v_1^2 \sin^2\beta_1 A_e \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{H} = \varrho v_1^2 \sin\beta_1 A_e \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin\beta_1\\ \cos\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-625\\2165\end{pmatrix}\ \mathrm{N}$$