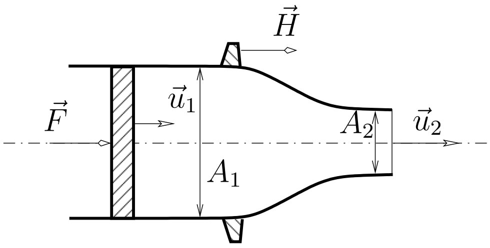
4.2 Düse.

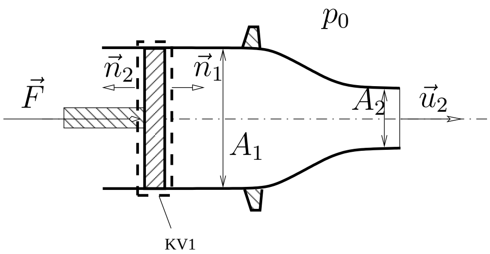
Ein mit Flüssigkeit der Dichte ϱ gefülltes Rohr mit der Querschnittsfläche A_1 mündet in eine Düse mit der Querschnittsfläche A_2 und wird dadurch geleert, daß ein Kolben mit der konstanten Geschwindigkeit u_1 durch das Rohr geschoben wird.
Berechnen Sie die Kraft F, mit der man den Kolben verschieben muß, sowie die Haltekraft H.



4.2.1 Kraft $\vec{F}$

Kontrollvolumen KV_1

Impulsbilanz gilt ausschließlich für stationäre Vorgänge. Wird ein ortsfestes Kontrollvolumen gewählt, liegt ein instationäres Problem vor und die Impulsbilanz kann nicht angewandt werden. Aber, das Problem kann mittels eines mit dem Kolben mitbewegten Kontrollvolumens in ein stationäres Problem umformuliert werden. Dann gilt die Impulsbilanz in der bekannten Form.



Normalvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Impulsbilanz IB

$$\underbrace{\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v}\, \mathrm{d}O}_{=0,\ \text{da keine Durchströmung}} + \oint_{\partial \mathrm{KV}} p \vec{n}\, \mathrm{d}O = \underbrace{\int_{\mathrm{KV}} \varrho \vec{g}\, \mathrm{d}V}_{\text{vernachlässigt}} + \Sigma \vec{F}_K$$

Druckintegral:

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = p_0\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}A_1 + p_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}A_1$$
$$= (p_1 - p_0)\,A_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Kräfte:

$$\Sigma\vec{F}_K = \vec{F}$$

Bernoulligleichung

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{u_1^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gh$$
$$(p_1 - p_0) = \frac{\rho}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right)$$

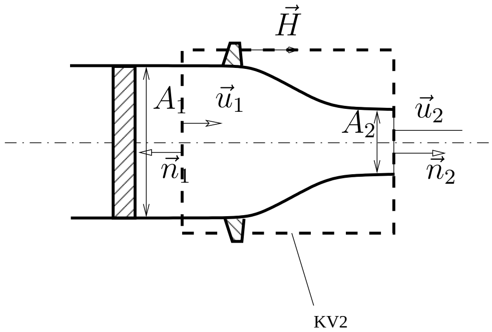
Massenbilanz MB

$$\varrho u_1 A_1 = \varrho u_2 A_2$$
$$u_2 = u_1\frac{A_1}{A_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\rho}{2}u_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]A_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$$

4.2.2 Haltekraft $\vec{H}$

Kontrollvolumen KV_2



Normalvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = u_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad u_{1n} = u_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -u_1,$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{2n} = u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2$$

Impulsbilanz

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v} \, \mathrm{d}O + \oint_{\partial \mathrm{KV}} p \vec{n} \, \mathrm{d}O = \underbrace{\int_{\mathrm{KV}} \varrho \vec{g} \, \mathrm{d}V}_{\text{vernachlässigt}} + \Sigma \vec{F}_K$$

Konvektiver Anteil:

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} \varrho v_n \vec{v} \, \mathrm{d}O = -\rho u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 A_1 + \rho u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 A_2 + 0$$

$$= \rho \left(-u_1^2 A_1 + u_2^2 A_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Druckanteil:

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} p \vec{n} \, \mathrm{d}O = -p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A_1 + p_0 \underbrace{\oint_{\partial \mathrm{KV}} \vec{n} \, \mathrm{d}O}_{=0} - p_0 \underbrace{\int_{A_1} \vec{n} \, \mathrm{d}O}_{=-A_1 \binom{1}{0}}$$

$$= (p_0 - p_1) \, A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{F}$$

Kräfte:

$$\Sigma \vec{F}_K = \vec{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = -\vec{F} + \rho u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$