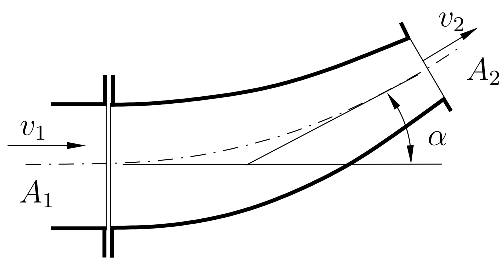
Kapitel 4

Impulssatz

4.1 Rohrkrümmer.

Gegeben ist ein Rohrkrümmer (Skizze) mit Eintrittsquerschnitt A_1 und Austrittsquerschnitt A_2. Die Geschwindigkeit v_1 im Eintrittsquerschnitt sowie der Außendruck p_2 seien ebenfalls bekannt. Der Krümmer lenkt die Strömung um einen Winkel α um.

Berechnen Sie die Haltekraft $\vec{H}$, die in der Flanschverbindung übertragen wird, sowie die Kraft $\vec{R}$, die von der Flüssigkeit auf die Innenwand des Krümmers ausgeübt wird.



4.1.1 Haltekraft $\vec{H}$

Massenbilanz MB

$$\dot{V} = uA = \text{const}$$
$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$
$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \tag{4.1}$$

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

Hydrostatische Höhe h vernachlässigt:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}$$

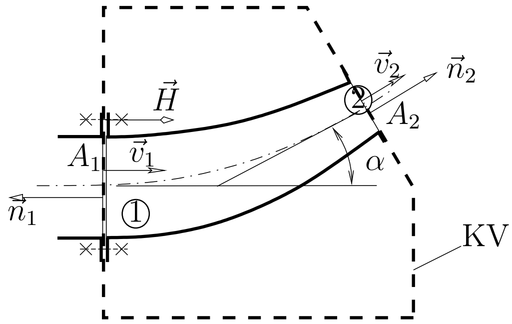
$$p_1=p_2+\frac{\rho}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)$$

(4.1) einsetzen:

$$p_1=p_2+\frac{\rho}{2}v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2}-1\right) \tag{4.2}$$

Impulsbilanz IB

$$\oint\limits_{\partial\mathrm{KV}}\varrho v_n\vec{v}\,\mathrm{d}O+\oint\limits_{\partial\mathrm{KV}}p\vec{n}\,\mathrm{d}O=\int\limits_{\mathrm{KV}}\varrho\vec{g}\,\mathrm{d}V+\Sigma\vec{F}_K \tag{4.3}$$



Normalvektoren:

$$1:\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}v_1\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{n}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\qquad v_{1n}=\vec{v}_1\cdot\vec{n}_1=-v_1$$

$$2:\quad \vec{v}_2=v_2\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix},\quad \vec{n}_2=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix},\quad v_{2n}=\vec{v}_2\cdot\vec{n}_2=v_2\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}=v_2$$

$$\text{sonst}:\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad\qquad \to v_n=0$$

Konvektiver Anteil:

$$\oint\limits_{\partial\mathrm{KV}}\varrho v_n\vec{v}\,\mathrm{d}O=\rho\vec{v}_1v_{1n}A_1+\rho\vec{v}_2v_{2n}A_2$$

(4.1) einsetzen

$$=\rho v_1^2A_1\left[-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{A_1}{A_2}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}\right] \tag{4.4}$$

Druckanteil:

$$\oint\limits_{\partial\mathrm{KV}}p\vec{n}\,\mathrm{d}O=p_1\vec{n}_1A_1+p_2\int_{\partial\mathrm{KV}-A_1}\vec{n}\,\mathrm{d}O$$

$$=p_1\vec{n}_1A_1+p_2\left(\oint_{\partial\mathrm{KV}}\vec{n}\,\mathrm{d}O-\int_{A_1}\vec{n}\,\mathrm{d}O\right)$$

$$\oint_{\partial \mathrm{KV}} \vec{n}\,\mathrm{d}O = 0 \Rightarrow \qquad = -\left(p_1 - p_2\right) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Gewichtskraftanteil:

$$\int\limits_{\mathrm{KV}} \varrho \vec{g}\,\mathrm{d}V \neq 0 \text{ , hier aber vernachlässigt} \tag{4.6}$$

Sonstige Kräfte auf die Fluide im Kontrollvolumen:

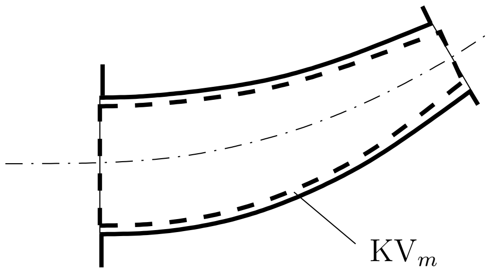
$$\Sigma \vec{F}_K = \vec{H} \tag{4.7}$$

(4.4)-(4.7) in (4.3) eingesetzt $\rightarrow \vec{H}$:

$$\vec{H} = \varrho v_1^2 A_1 \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right] - \left(p_1 - p_2\right) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Mantelkraft $\vec{R}$

... Kraft, die die Flüssigkeit auf die Krümmerwand ausübt.



Impulsbilanz wie oben.
Konvektiver Anteil: wie oben, da Körperkontur=Stromlinie
Druckanteil:

$$\oint\limits_{\partial \mathrm{KV}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O = \underbrace{\int_{\mathrm{Mantel}} p\vec{n}\,\mathrm{d}O}_{=\vec{R}} + p_1 \vec{n}_1 A_1 + p_2 \vec{n}_2 A_2$$

$$= \vec{R} + p_1 A_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 A_2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Haltekraft:

$$\vec{H} = 0$$

somit:

$$\vec{R} = -\varrho v_1^2 A_1 \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right] + p_1 A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - p_2 A_2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$