

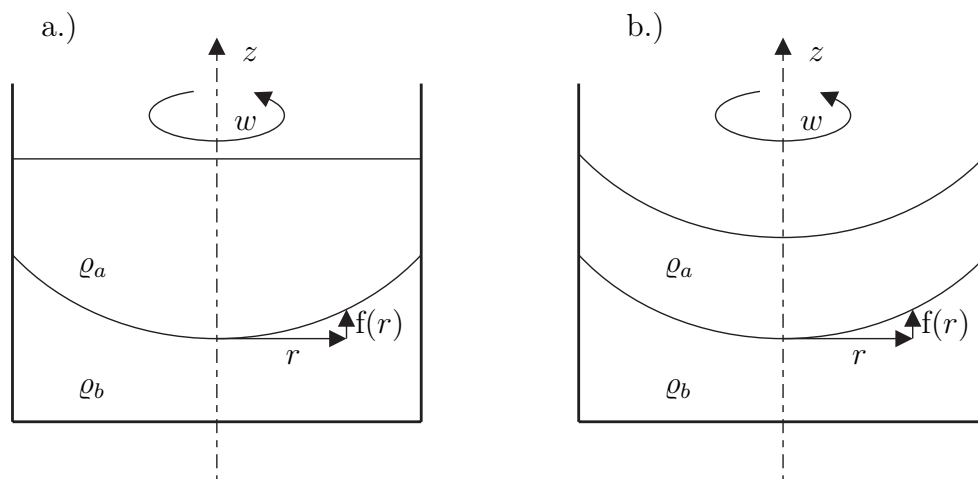
Kapitel 3

Rotierende Flüssigkeit

3.1 Rotierende Flüssigkeit.

Ein kreiszylindrischer Behälter ist mit zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten der Dichten ϱ_a und ϱ_b gefüllt, wobei $\varrho_a < \varrho_b$ gilt. Welcher Gleichung $z = f(r)$ genügt die Trennlinie zwischen den beiden Flüssigkeiten, wenn

1. die untere Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, während die obere Flüssigkeit ruht?
2. beide Flüssigkeiten mit der Geschwindigkeit ω rotieren?



3.1.1 a ruht, b rotiert mit $\omega = \text{const.}$ um vertikale Achse

→ Stromlinien sind Kreise! Im Punkt $z = 0, r = 0$ soll der Druck p^* herrschen. Ausgehend von einem beliebigen Punkt innerhalb der Flüssigkeit b kann die Änderung des Druckes angegeben werden:

$$\frac{\partial p_b}{\partial r} = \varrho_b \frac{v^2}{r} = \varrho_b r \omega^2 \qquad \frac{\partial p_b}{\partial z} = -\varrho_b g$$

Integration liefert

$$p_b = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} + f_1(z)$$

$$p_b = -\varrho_b g z + f_2(r)$$

und es folgt somit für den Druck

$$p_b = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_b g z + p^*$$

$$p^* = p_0 + \varrho_a g h_a$$

Da die Flüssigkeit a ruht, gilt für den Druck in a:

$$p_a = p^* - \varrho_a g z$$

Für die Grenzfläche bei $z = f(r)$ muß bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung gelten:

$$p_a(r, f(r)) = p_b(r, f(r))$$

$$p^* - \varrho_a g z = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_b g z + p^*$$

$$\rightarrow f(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \frac{\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a}$$

3.1.2 a rotiert auch mit $\omega = \text{const.}$

Während die Druckverhältnisse in b sich nicht geändert haben, ist der Druck in a nun

$$p_a = \varrho_a \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_a g z + p^*$$

Für die Grenzfläche bei $z = f(r)$ muß bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung erneut gelten:

$$p_a(r, f(r)) = p_b(r, f(r))$$

$$\varrho_a \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_a g z + p^* = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_b g z + p^*$$

$$\rightarrow f(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Wichtig: Die Bernoulli-Gleichung gilt nur entlang von Stromlinien!