Kapitel 2

Bernoulli-Gleichung

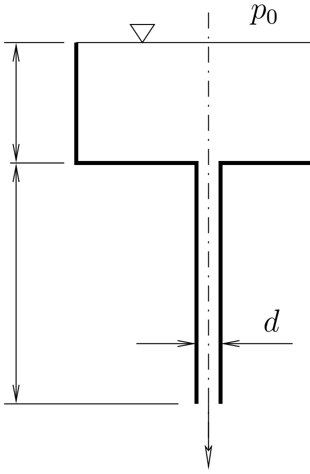
2.1 Fallrohr.

In einem Behälter von sehr großem Querschnitt befindet sich bis zur Höhe h Wasser der Dichte ϱ. Zur Vermeidung von Dampfbildung (Dampfdruck p_D) am Rohreinlauf muß die Rohrlänge l begrenzt bleiben.

Wie groß kann die Länge l maximal ausgeführt werden, wenn

1. der Rohrdurchmesser d konstant ist?
2. am Rohrende eine Düse den Rohrdurchmesser von d auf $d/2$ verringert?

Berechnen Sie das Ergebnis zunächst allgemein und sodann für die Zahlenwerte $d = 100$ mm, $\varrho = 1000$ kg/m^3, $h = 5$ m und Umgebungsdruck $p_0 = 1$ bar.

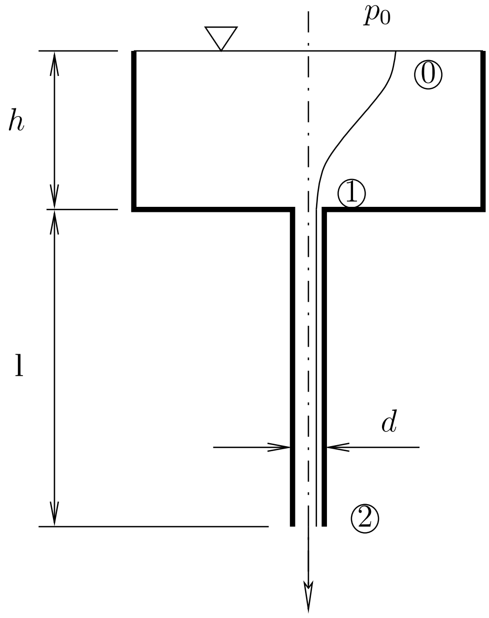


2.1.1 Bernoulligleichung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

$$\boxed{\text{stationär, reibungsfrei, inkompressibel, entlang Stromlinie}}$$

Bernoulligleichung entlang Stromlinie



⓪–①:

$$\frac{p_0}{\varrho} + g \cdot h + \frac{0^2}{2} = \frac{p_1}{\varrho} + g \cdot 0 + \frac{u_1^2}{2} \tag{2.1}$$

①–②:

$$\frac{p_1}{\varrho} + g \cdot l + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_0}{\varrho} + g \cdot 0 + \frac{u_2^2}{2} \tag{2.2}$$

Massenbilanz MB

$$\boxed{\dot{m} = \varrho u A = \text{const}}$$
$$\varrho = \text{const} \Rightarrow \dot{V} = uA = \text{const}$$

①–②:

$$u_1 \frac{d^2}{4} = u_2 \frac{d_2^2}{4}$$
$$u_2 = u_1 \frac{d^2}{d_2^2} \tag{2.3}$$

somit wird (2.2)

$$\frac{p_0 - p_1}{\varrho} = \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{d^4}{d_2^4}\right) + gl \tag{2.4}$$

und (2.1)

$$\frac{p_0 - p_1}{\varrho} = \frac{u_1^2}{2} - gh \tag{2.5}$$

(2.4)=(2.5):

$$u_1^2 = 2g\,(l+h)\,\frac{d_2^4}{d^4} \tag{2.6}$$

In (2.5) eingesetzt:

$$l = \left(\frac{p_0 - p_1}{\varrho} + gh\right)\frac{1}{g}\frac{d^4}{d_2^4} - h \tag{2.7}$$

Berechnung der maximalen Länge

Da p_D gegenüber p_0 sehr klein ist, soll hier der einfachheithalber $p_D \approx 0$ angenommen werden.

1. $d = const$	$l \leq \frac{p_0}{\varrho g} + h - h$	$u_1^2 = 2g\left(\frac{p_0}{\varrho g} + h\right)$	$u_2 = u_1$
	$l \leq 10,2$ m	$u_1 = 17,3$ m/s	$u_2 = 17,3$ m/s
2. $d_s = \frac{d}{2}$	$l \leq \left(\frac{p_0}{\varrho g} + h\right) \cdot 16 - h$	$u_1^2 = 2g\left(\frac{p_0}{\varrho g} + h\right)$	$u_2 = u_1 \cdot 4$
	$l \leq 238$ m	$u_1 = 17,3$ m/s	$u_2 = 69$ m/s

2.1.2 Druckverlauf